离散数学原理之二

图论及其算法

王树禾　编著

中国科学技术大学出版社

1990・合肥

内 容 简 介

本书系统地阐述了图论与算法图论的基本概念，基础理论，基本算法及其重要应用，立论严谨，概念清楚，语言流畅，载有大量例题及著名算法，每章布置足够多的引人入胜的习题，是图论教学与自学比较理想的一部书。

本书可作为理工科大学计算机、无线电电讯、系统科学、应用数学等专业的本科生及研究生的教材，并可供有关专业研究人员参考。

图 论 及 其 算 法

王树禾 编著

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

开本：850×1168/32 印张：10.75 字数：279千

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

印数：1-4000册

ISBN7-312-00216-1/O·82 定价：2.60元

序

多年来，为了大规模快速计算的目的，数学影响了计算机科学的形成与发展，随着计算机在社会中作用的变大，它反过来又影响数学，图论就是这方面的显著范例。由于图论对计算机有许多应用，例如数据表示、网络设计等等，搞计算机科学技术的都要学习图论。

当然，图论的应用领域远不止于此，它同理论物理、有机化学、系统科学、运筹学、社会学等等都有关联。至于同数学内部，例如代数结构、数学关系论、拓扑学等等的关系更是众所周知的；它同组合数学的关系如此之密切，以致于许多人都认为图论是组合数学的一个重要组成部分。

学习好图论，除了能使人应用它的成果，同样重要的是能培养思考和解决问题的能力，从长远观点来看，它理应成为人们必须接受的数学教育的不可少的科目之一。

王树禾同志编著的这本书，是他多次使用并不断更新完善的两份讲义重新组织改写的结果，书中从问题的陈述到论证解答，都有许多独到之处。他用自己的讲义，已经培养了中国科学技术大学计算机科学技术系九届毕业生，教学实践证明，即使是原来的讲义，也已经是相当之成功的。

本书包括了现今图论教材中应涉及的所有课题；它的基本理论严谨，系统性强；另一个特色在于它相当强调算法。图论算法是算法设计与分析这一分支中的重要组成部分；数学证明的算法化已经形成潮流，在计算机大量应用的时代，这当然是不可避免的。采用本书学习图理论的同时，学习相应的算法及其分析方

法，这自然是十分理想的。

综上可见，这是一部理科和工科大学生、研究生以及工程技术人员、教师都可以学习、参考的好书。

陶懋颀

1990年2月于北京

前　　言

本书阐述了图论与算法图论的基本概念与基础理论，包括计算复杂性的概念与理论。书中主要采用构造性的组合技术和代数方法，要求读者具有线性代数与代数结构两门学科的基础知识；当然，由于图论自身的特点，还要求读者具备足够的数学机敏性与成熟性。

本书共分十七章，各章布置了较丰富的习题(共计 361 题)。习题和书中的例题一样有趣，不少习题自身就是比较重要的定理。图论题目，不仅要引用定义定理，而且往往需要运用精彩的技巧才能解决；不多做习题，不可能掌握图论的思想与方法。

本书问世过程中，陶懋颀教授提出许多重要建议，并为本书撰写了序言和第十七章，作者对陶懋颀同志对本书的贡献表示感谢。

李乔教授对本书的出版给予热情支持和鼓励，并提出重要修改意见，在此谨致谢忱。

王树禾

1990年2月于科大数学系

目　录

1 通　　论

1.1 图论的内容与历史回顾

本节以比较自由的方式介绍图论的主要内容，并对它的重要历史事件进行回顾。所涉及的内容以后各章节将予以严格而详细地论述。

一个图就是一个集合V连同V的一些二元子集的集合构成的一个数学结构。

1736年是图论的历史元年。这一年，Euler研究Königsberg（今苏联加里宁格勒）的七桥问题（图1.1(a)），发表了图论的首篇论文。当时哥尼斯堡的市民热衷于这样一个有趣的游戏：从

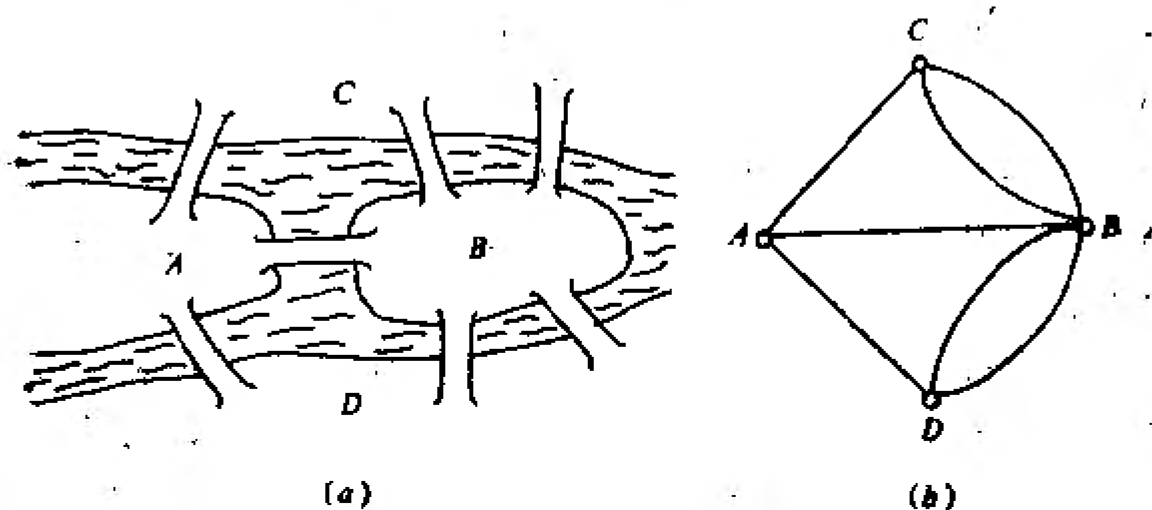


图 1.1

A，B，C，D四块土地的某一处出发，通过每座桥恰一次再回到出发地，是否可能？Euler否定地回答了这个问题，他把A，B，C，D四块土地抽象成四个几何点，于是就得到图1.1(b)，从而得到证明。事实上，A，B，C，D任何一个点做为出发点

时，都必然是先“出”后“回”，最后以“出”告终，才能行遍与该点相连的桥，所以不可能回到原来的出发点。Euler 堪称图论之父。

我们看到，正是上述似乎没有多大意义的七桥游戏，它的抽象与论证的方法，开创了图论科学的研究。遗憾的是，由于当时社会生产落后，对图论知识的要求甚寡，这一学科的发展颇为迟缓，甚至处于停滞状态。两百年以后，1936年，匈牙利著名图论学家König 发表《有限图与无限图理论》，这是图论的第一部专著，它总结了图论二百年的主要成果，是图论的重要里程碑。此后的五十多年，图论经历了一场爆炸性的发展，终于成长为数学科学中一门独立的学科。它的主要分支有图论、超图理论、极值图论、算法图论、网络图论和随机图论等。近二十年来，图论在科学界可以说是异军突起，活跃非常。原因主要有两条：一是现代生产和科学技术向图论提出越来越多的问题要求解决，无论在数学、物理学、化学、天文学、地理学和生物学等基础学科，还是有线电、无线电、交通运输、军事作战等高技术学科，图论都是大有作为的。第二个主要原因是大型电子计算机的出现和计算机科学的迅猛发展，为图论及其算法的解决提供了强大的计数与证明的手段，而图论对开关理论、形式语言、数据结构、编译程序、操作系统、人工智能、计算机网络等方面，亦有显著贡献。

二十世纪科学史上重要事件之一是1976年美国伊利诺大学的 Appel 和 Haken 在 Koch 的协作之下，用计算机证明了数学史上悬挂多年的四色猜想是正确的。他们用了一百亿逻辑判断，花了一千二百个机时，从此 4CC 便晋升为四色定理：χ(平面图)$\leqslant 4$。

四色猜想的原始提法是：地图或地球仪上，最多用四种颜色即可把每一国之版图染好，使得国界线两侧异色。

这个问题如此之简单，以致于可以在两三分钟之内向公路上

和我们随机相遇的行人讲清楚。但是，1976年以前的百余年间，有多少精干的数学家潜心研究过它，无奈谁也未能得出实质性进展，时至今日，仍欠理论性（非计算机的）证明。当然，大批优秀数学家的工作并非徒劳，人们在冲击4CC时采用的思路、方法和技巧，为图论宝库增添了一个又一个精彩成果，例如1912年Birkhoff提出了颜色多项式理论。1879年伦敦数学会的Kemple发表了证明4CC的论文，尽管他的证明十年后被人指出错误，但Kemple的极为精巧的论证方法，用Appel的话来说，其实"包含着一个世纪后终于引出正确证明的绝大部分基本思想"。1890年，Heawovd用Kemple的方法证明了五色定理：χ（平面图）$\leqslant 5$。

4CC是1852年一个叫做Guthrie的伦敦学生提出的。伊利诺事件宣告了数学难题由机器证明的新纪元已经开始。

与染色有关的生动问题非常之多，封面上那幅漂亮的图，涉及许多图论中要讨论的概念：它是无桥三次正则图，每个顶点处关联了三条边；它的围长不小于5，它的边色数是4，删除三条边不会使它破裂成两个有边图，这种图叫做妖怪（Snark graph），这里"妖怪"是个数学名词，并非绰号，事实上，因为有这种性质的图非常之难以设计（扑捉）出来，所以称这种图为妖怪。

还可以再提出一个虽然还没有难到人令绝望的程度，看来也是非常之不易解决的问题，它就是著名的Ulam猜想（1929年）：

G_1, G_2是两个顶数相同的图，$V(G_1)=\{u_1,\cdots,u_n\}$，$V(G_2)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$G_1-u_i\cong G_2-v_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则$G_1\cong G_2$。

正如4CC之证明，指望用手和笔写出Ulam猜想之证明谈何容易！

Hamilton图是顶点分布在同一个圆周上的图，它是1895年Hamilton玩旅游世界的游戏时提出的。这种图中的难题多得很，至今连Hamilton图的充要条件（象样儿的）尚未建立。与Hamilton图有血缘关系的是货郎问题：

一位货郎从城中出发去各村卖货，再返回城来，要求各村都要恰到一次，试求他的最短里程。

用计算机“历数”各种行动方案来挑这个最短里程是不现实的，假如有20个村子，任何两村之间都有路直接相通，要比较$\frac{1}{2}\times 20!$次，这在每秒千万次的计算机上亦要百年。目前正在努力探求有效的解决方法。

在诸多图论难题之中，还有一个 Ramsey 问题，直观地讲，就是问：任给一人群，有k个人相识或l个人不相识，这群人至少几人？这个答案用$r(k, l)$表示，目前我们连$r(4, 5)$的值都得不出来。本书中，我们将给出一些$r(k,l)$的值，例如$r(3,3)=6$，它的证明十分简单：

用六个点代表六个人，相识者之间连一绿边，否则连一红边。六个人分别为v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6。与v_1相关联的五条边中有三条同色，不妨设其为绿色，这三边的另一端不妨设为v_2，v_3，v_4，若$\Delta v_2v_3v_4$是同色三角形，则有三人相识或不相识；否则，$\Delta v_2v_3v_4$中有绿色边，于是在v_1，v_2，v_3，v_4之间出现绿色三角形，即有三人相识；而只有五人的人群，未必如此。例如图1.2中，实线表示相识，虚线表示不相识。

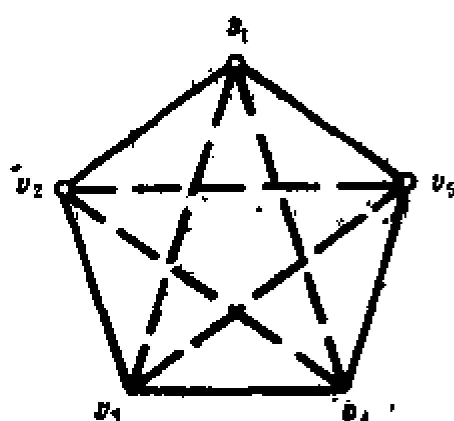


图 1.2

从许多实例中，我们发现图论最吸引人的特色是它蕴含着大量强有力的思想、漂亮的图形和巧妙的论证、即使是非常困难的尚未解决的问题也易于表达。现实生活中处处潜藏有图论的难题，图论是最接近群众生活，最容易向科学水准很低的人们阐述的一门学科。问题外表的简单朴素和本质上的难以解决，使每个搞图论的人在图论问题面前都必须谨慎严肃地思考问题。常常是一个貌似简单的问题，即使幸运地得出证

明，证明中包含的细节也十分之繁琐，并且往往运用了极艰苦的计算。

在过去的十年中，图论的算法受到了更多的重视。我们有有效算法求得两个顶之间的最短道路（Dijkstra 算法），却尚未找到求图中最长轨道的有效算法；我们还没有一个有效的算法判别一个图的顶点是否分布在同一个圆周上；我们也没有有效算法确定平面图能否用三种颜色正常（邻顶异色）着色；我们在网络理论中，已经有有效算法，知道如何在铁路网上把工厂生产的一种商品最多地运往销地，但对于两个工厂出产的两种产品，分别运往两个销地时，我们尚无有效的算法安排运输，使得两个销地的需求得以满足，等等。图论发展至今，已经积累了数以百计的这种现实问题，仍然找不到解决的有效算法。Edmonds，Cook 和 Karp 等人发现，这批难题有一个值得注意的性质，对其中一个问题存在有效算法时，每个问题都会有有效算法。这些问题号称 NP-完全问题，其代号为 NPC。离散数学中最大的挑战之一就是确定 NPC 问题们是否真的不存在有效算法？

1.2 图的定义

定义 1 **有序三重集合** $G=\{V(G), E(G), \psi_G\}$ **称为一个图，其中** $V(G)\neq\phi$，**叫做顶点集合，** $V(G)$ **的元素叫做图** G **的顶点；** $E(G)$ **叫做边集合，** $E(G)$ **的元素叫做边；** $V(G)\cap E(G)=\phi$；ψ_G **叫做关联函数，其定义域是** $E(G)$，$\forall e\in E(G)$，$\exists$ **唯一的顶对** $u,v\in V(G)$，**使得** $\psi_G(e)=uv$；**当** u **与** v **无序时，** G **叫做无向图；当** u，v **有序时，** G **叫做有向图；记** $|V(G)|=\nu$，$|E(G)|=\varepsilon$，**当** $\nu+\varepsilon<+\infty$ **时，** G **叫做有限图，否则为无限图。**

本书只讨论有限图。

为直观起见，我们如下地画一个图的图示：把 $V(G)$ 的元素用不重合的几何点表示，位置任选；当 $\psi_G(e)=uv$ 时，若是无

向图，在顶 u 与 v 之间连一条曲线表示边 e，若是有向图，则在上述曲线上从 u 到 v 画上箭头。曲线的长短曲直不加介意。一般，顶点标以 v_1，v_2，…，v_n，…，边标以 e_1，e_2，…，e_m，…；顶点标志字母的图叫做标志图。

图与其图示不是一回事，但它们是同构的，为了直观，下面我们把图示看成就是原来那个图。

例 1 在图1.3中，

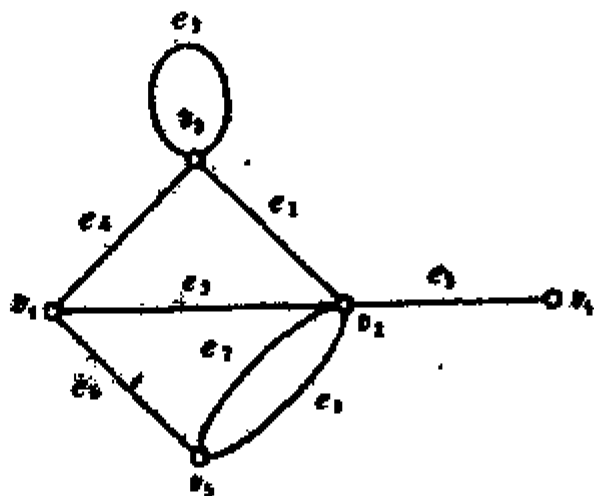


图 1.3

$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\},$$
$$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\},$$
$$\psi_G(e_1)=v_1v_2,$$
$$\psi_G(e_2)=v_2v_3,$$
$$\psi_G(e_3)=v_3v_3,$$
$$\psi_G(e_4)=v_1v_4,$$
$$\psi_G(e_5)=v_2v_4,$$
$$\psi_G(e_6)=v_4v_5,$$
$$\psi_G(e_7)=\psi_G(e_8)=v_2v_5.$$

下面我们列出十一个术语：

（1）**边的端点**：$\psi_G(e)=uv$ 时，u 与 v 叫做边 e 之端点，也可写成 $e=uv$。

（2）**边与顶相关联**：$\psi_G(e)=uv$ 时，e 与 u，v 相关联。

（3）**邻顶**：$\psi_G(e)=uv$ 时，u 与 v 叫做邻顶。

（4）**邻边**：与同一顶关联的两条边叫做邻边。

（5）**环**：只与一个顶关联的边叫做环。

（6）**重边**：$\psi_G(e_1)=\psi_G(e_2)=uv$ 时，e_1 叫 e_2 叫做重边。

（7）**平凡图**：$\nu=1$，$\varepsilon=0$ 的图。

（8）**单图**：无环无重边的图。

（9）**完全图**：任二顶皆相邻的图，记成 K_ν。

（10）**二分图**：$V(G)=X\cup Y$，$X\cap Y=\phi$，X 中的任二顶

不相邻，Y 中的任二顶亦不相邻，则 G 叫做二分图；若 X 中的每一顶皆与 Y 中一切顶相邻时，G 叫做**完全二分图**，记之为 $K_{m,n}$，其中 $|X|=m$，$|Y|=n$。

(11) **顶点 v 的次数**：记成 $d(v)$，定义 $d(v)=d_1(v)+2l(v)$，其中 $d_1(v)$ 是与 v 相关联的非环边数，$l(v)$ 是与 v 相关联的环数。

例如图 1.3 中，$d(v_3)=4$，$d(v_4)=3$，$d(v_5)=3$。

定理 1 (Euler, 1736) $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$。

证 定义函数

$$\xi(v_i,v_j)=\begin{cases}1, & \text{当 } v_iv_j\in E(G),\\ 0, & \text{否则；} i=1,2,\cdots,\nu, j=1,2,\cdots,\nu.\end{cases}$$

当 G 是单图时，

$$d(v_j)=\sum_{i=1}^{\nu}\xi(v_i,v_j),$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu}d(v_j)&=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\xi(v_i,v_j)\\ &=\xi(v_1,v_1)+\xi(v_1,v_2)+\xi(v_1,v_3)+\cdots+\xi(v_1,v_\nu)\\ &\quad+\xi(v_2,v_1)+\xi(v_2,v_2)+\xi(v_2,v_3)+\cdots+\xi(v_2,v_\nu)\\ &\quad\cdots\cdots\\ &\quad+\xi(v_\nu,v_1)+\xi(v_\nu,v_2)+\xi(v_\nu,v_3)+\cdots+\xi(v_\nu,v_\nu)\\ &=2\varepsilon.\end{aligned}$$

当 G 不是单图时，只要把每一环与每一重边上“嵌入”一个新顶，类似可证，$\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$。**证毕。**

上述证明无非是“每条边两个‘头儿’，一共有 2ε 个线头儿”的严格化。

推论 1 奇次顶的总数是偶数。

证 令$V(G)=V_e\cup V_0$，V_e是偶次顶的集合，V_0是奇次顶的集合，由定理1，

$$\sum_{v\in V_e}d(v)+\sum_{v\in V_0}d(v)=2\varepsilon,$$

而$\sum\limits_{v\in V_e}d(v)$是偶数，故$\sum\limits_{v\in V_0}d(v)$亦为偶数，但$V_0$中每顶皆奇次，故$|V_0|$必为偶数。**证毕。**

例 2 晚会上大家握手言欢，试证握过奇次手的人数是偶数。

证 构作一图，以人为顶，二人握手时，则相应的二顶之间连一边，于是每人握手的次数即为相应顶的次数，由推论1，奇次顶的个数是偶数，所以握过奇次手的人数为偶数。**证毕。**

例 3 空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而每个面又有奇数条边。

证 以此多面体的面集合为$V(G)$。当且仅当两个面有公共棱时，在G的相应两顶间连一边，得到图G。依题意，$|V(G)|$是奇数，而且$d(v)$从而$\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)$也是奇数，与定理1相违，故这种多面体不存在。**证毕。**

例 4 碳氢化合物中氢原子个数是偶数。

证 以每个原子为顶，每条化学键为边，则每个碳氢化合物就是一个图。“氢”的次数是1，由推论1，氢的原子个数是偶数。**证毕。**

以后我们把$d(v)=k$的图叫做k**次正则图**。例如妖怪是二次正则图。我们也经常使用下面两个符号：

$$\delta=\min_{1\leqslant i\leqslant\nu}\{d(v_i)\},\quad \Delta=\max_{1\leqslant i\leqslant\nu}\{d(v_i)\}.$$

下面给出两个图同构的定义。

定义 2 G与H是两个图，存在映射

$$\theta:V(G)\to V(H),$$

$$\varphi: E(G) \to E(H),$$

θ与φ皆为可逆映射。当且仅当$\psi_G(e)=uv$时，$\psi_H(\varphi(e))=\theta(u)\theta(v)$，则称$G$与$H$同构，记成$G\cong H$。

两个图同构时，其图示可以画成平面几何中的全等形。上述定义中的$\psi_H(\varphi(e))=\theta(u)\theta(v)$当且仅当$\psi_G(e)=uv$的意思是同构图的"对应顶夹对应边"。例如下面两个图是同构的：

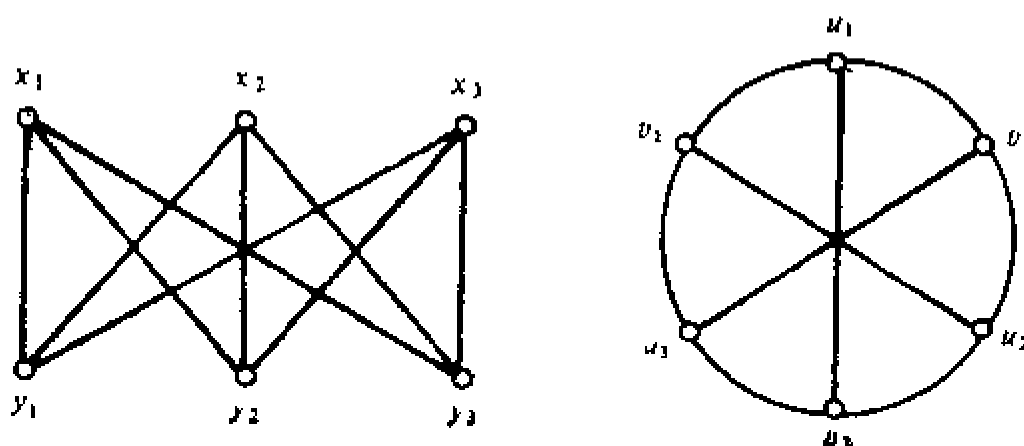


图 1.4

1.3 轨道与连通

本节只讨论无向单图。

定义 3 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$，其中$e_i\in E(G)$，$i=1,2,\cdots,k$；$v_j\in V(G)$，$j=0,1,\cdots,k$；且$e_i$与$v_{i-1}$，$v_i$相关联，则称$W$为图$G$中的一条道路，$v_0$做叫$W$的起点，$v_k$为终点，$k$为路长，$v_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$叫做道路的内点。各边相异的道路叫做行迹。顶点各异的道路叫做轨道，记成$P(v_0,v_k)$。起点与终点重合的道路叫做回路。起点与终点重合的轨道叫做圈。长k的圈叫k阶道。u,v两顶的距离是指u,v间最短轨道的长度。记之为$d(u,v)$。若u,v两顶间存在道路，则称u与v相连通。图G中任二个顶皆连通时，称G为连通图。

定义 4 G与H为两个图，$V(H)\subset V(G)$，$E(H)\subset E(G)$，则称H是G之子图，记成$H\subset G$；若$H\subseteq G$，且H与G不同构，则

H是G之真子图，记成$H\subset G$；若$H\subseteq G$，且$V(H)=V(G)$，则称H是G的生成子图；若$H\subseteq G$，且$V(H)=V'$，$E(H)$是由$E(G)$中两端皆在V'中的边构成的子集，则称H为由V'导出的G之子图，记成$H=G[V']$；若$V(G)=\bigcup_{i=1}^{\omega}V_i$，又当且仅当两个顶同属一个子集$V_i$时，此二顶连通，则称$G[V_i](i=1,2,\cdots,\omega)$为$G$的连通片。

由以上定义知，G是连通图当且仅当$\omega=1$。

显然，若u与v之间存在道路，则u与v之间存在轨道；闭的行迹中含有圈。但回路上未必含圈，例如K_2中有回路$v_1v_2v_1$，但K_2中无圈。

例 5 有$2n$个电话交换台，每个台与至少n个台有直通线路，则其中任两台之间可以通话。

证 把交换台视为图G的顶点，当且仅当两个台有直通线路时，两个相应的顶是相邻的。于是问题化为$2n$个顶点的图，每顶次数至少为n，则图G是连通的。事实上，若G不连通，则至少有一个连通片，其顶点数目至多是n，在此连通片中，顶的次数最大是$n-1$，与原图中每顶次数至少为n相违。**证毕。**

例 6 图中只有两个奇次顶，则它们必连通。

证 否则此二顶分属两个连通片，而每个连通片看成一个图时，只有一个奇次顶，与推论1矛盾。**证毕。**

定理 2 **G为二分图的充要条件是G中无奇圈。**

证 不妨考虑连通图。

若二分图G中无圈，则无奇圈。若G中有一个圈$C=v_0v_1v_2\cdots v_kv_0$，不妨设$v_0\in X$，于是$v_0,v_2,v_4,\cdots,v_0\in X$，$v_1,v_3,\cdots,v_k\in Y$，可见$k$是奇数，圈$C$长$k+1$，是偶圈。至此证明出二分图中无奇圈。

反之，若G中无奇圈，往证G是二分图。为此，令

$$X=\{w\mid w\in V(G),\ d(v_1,w)=\text{even}\},$$

$$Y=\{w \mid w\in V(G),\ d(v_1,w)=\text{odd}\},$$

其中v_1是G的任一顶点。$\forall u,v\in X$，设$P_1(v_1,u)$是从v_1至u的最短轨，$P_2(v_1,v)$是从v_1至v的最短轨，设u_1是P_1与P_2的最后一个公共顶点，因$P_1(v_1,u)$与$P_2(v_1,v)$最短，故P_1上的一段$P_{11}(v_1,u_1)$与P_2上一段$P_{21}(v_1,u_1)$等长，且最短。因P_1与P_2之长为偶数，从而P_1上的一段$P_{12}(u_1,u)$与P_2上的一段$P_{22}(u_1,v)$有相同的奇偶性。若u与v相邻，则P_{12},P_{22}和uv围成一个奇圈，与G中无奇圈相违，故X中任二顶不相邻；同理可证Y中任二顶不相邻。**证毕。**

例 7 一只老鼠，在$3\times3\times3$的立方体乳酪块上咬出一条洞，这个洞通过$1\times1\times1$的27个小立方体的中心。它从大立方体的一角咬起，只要还有它没尝过的$1\times1\times1$的小点心块，就继续向前咬，问这只老鼠能否在$3\times3\times3$立方体中心停止？假设这只老鼠是从一个$1\times1\times1$的小立方体的中心沿与侧面正交的方向向另一未咬过的小点心块的中心咬去的。

解 以$1\times1\times1$的小立方体为顶构作一个图，把$3\times3\times3$立方体中心那块小立方体与开始被咬的小立方体之间连一条边，再把有公共侧面的小立方体之间连上边；以八个角上及六个侧面中心处的小立方体为X集合，其余的小立方体为Y集合，于是构成了一个二分图。由定理2，此图不会有27阶圈，所以老鼠不会停留在$3\times3\times3$立方体的中心。

例 8 一个单图中每个顶点的次数至少是2，就含有一个圈。

证 设$P(u,v)$是此单图G中的最长轨，由于$d(u)\geqslant2$，故存在不在$P(u,v)$上的一条边e与u相关联。设e的另一端点为w，若$w\notin P(u,v)$，则$P(u,v)$可以加长，与$P(u,v)$最长矛盾，故$w\in P(u,v)$，所以G中有圈。**证毕。**

例8中的所谓**最长轨方法**以后还会用到，它是图论中的典型技巧之一。

例 9 若G是连通图，$G'\subseteq G$，且$|V(G')|<|V(G)|$，则G

中有不属于G'的边，它的一个端点在G'上，另一端点不在G'上。

证 因G是连通图，又$|V(G')|<|V(G)|$，则可以找到$v\in V(G')$，$u\bar{\in}V(G')$有一条轨道$P(u,v)$。我们从u出发，沿$P(u,v)$前进，遇到第一个G'中的顶w为止，则$P(u,v)$上的一段$P(u,w)$的最后一条边即为题中所述的那种边。**证毕。**

例 9 的事实在图论的一些证明中常被引用。

有的例题其实就是一个有用的定理，为了重点突出，我们只把最重要的命题以定理的名义列出，其余命题则以例题的形式讲解或放入习题由读者自行论证。希望读者注意从例题与习题中吸收那些较为重要的常用的图论知识。

例 10 G是单图，每顶次数不小于 3，则G中有偶圈。

证 设$v_0v_1v_2\cdots v_m$是G中的一条最长轨，由于$d(v_0)\geqslant 3$，由"最长轨方法"知存在$v_i\neq v_j$，$1\leqslant i<j\leqslant m$，$v_i$，$v_j$皆与$v_0$相邻。若$i$与$j$中有奇数，例如$i$是奇数，则$v_0v_1v_2\cdots v_i$与边$v_0v_i$合成一个偶圈（长$i+1$）。若$i,j$都是偶数，则由$v_iv_{i+1}\cdots v_j$与边$v_0v_i$，$v_0v_j$合成一个例圈（长$j-i+2$）。**证毕。**

由例10知，妖怪图中有偶圈。

例 11 G为单图，每顶次数不小于 3，则G中各个圈长的最大公因数是 1 或 2。

证 只需证无大于 2 的公因数。由例 10，G中有长$i+1$，$j+1$和$j-i+2$的圈。若$i+1,j+1,j-i+2$有公因数$k>2$，则k能整除$j-i$，于是k能除尽 2，这是不可能的。**证毕。**

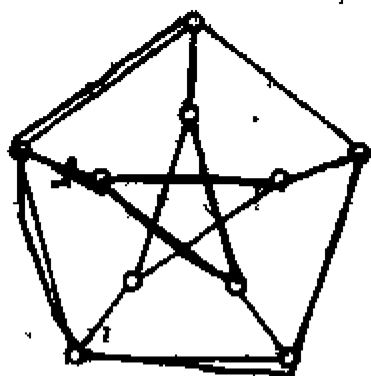


图 1.5

定义 5 **单图中最长圈的长度叫做该图的周长；最短圈的长度叫做该图的围（腰）长；图G的直径$d(G)$定义为$d(G)=\max\{d(u,v)|u,v\in V(G)\}$。**

例如，Petersen图（(图 1.5) 最小的妖怪）的周长是 9，围长是 5，直径是 2。

求图的周长和直径是图论中的难题之一。

定义 6 **单图 G 的补图记成 G^c。它是这样一个图，$V(G)=V(G^c)$，又当且仅当 G 中二顶不相邻时，此二顶在 G^c 中相邻。**

例 12 单图与其补图必有一个是连通图。

证 设单图 G 不连通，证 G^c 是连通图。设 $G_1,G_2,\cdots,G_\omega$ 是 G 的连通片。任取二顶 u,v，若 u,v 属于同一个连通片 G_i，$1\leqslant i\leqslant\omega$，$w$ 是不在 G_i 中的一个顶，则 $uw,vw\in E(G^c)$，即在 G^c 中 u 与 v 连通；若 u 与 v 分别属于两个连通片 G_k,G_l，$1\leqslant k,l\leqslant\omega$，则 $uv\in E(G^c)$，u 与 v 在 G^c 中亦连通。由 u 与 v 的任意性，知 G^c 上任二顶皆连通，故 G^c 是连通图。**证毕。**

1.4 Brouwer不动点定理

本节介绍拓扑学中著名的Brouwer不动点定理，为证明这个定理，拓扑学中用了一系列的预备知识，证明不易被未系统地学习过拓扑学的人所理解。本节用图论方法给出一个新证明，其通俗易懂之程度很值得欣赏。这是又一个用图论方法证明数学问题的生动范例。

我们把平面闭三角形区域 Δ^2 进行**单纯剖分**：

$$\Delta^2=\bigcup_{i=1}^{m}\delta_i^2,$$

δ_i^2 是比 Δ^2 小的三角形，且 $\delta_i^2\bigcap\limits_{i\neq j}\delta_j^2=\phi$ 或 δ^0 或 δ^1。这里 δ^0 是一个顶点，δ^1 是两个小三角形的公共边。把 Δ^2 与 $\delta_i^2,i=1,2,\cdots,m$ 的顶用 0，1，2 标号，若

（1）Δ^2 三个顶分别标以 0，1，2；

（2）Δ^2 的一条边两端标号为 i 与 j，$0\leqslant i<j\leqslant2$，与此边接触的小三角形之顶亦标号 i 或 j，则称这种标号为**正态标志**。

在正态标志之下，小三角形的三个顶分别标以0，1，2时，称这个小三角形为**正态三角形**。

定理 3 (Sperner) **Δ^2的单纯剖分正态标志中，必有奇数个正态三角形**。

证 令δ_0^2是Δ^2的外部区域，$\delta_1^2,\delta_2^2,\cdots,\delta_m^2$是剖分所得之小三角形，设计一个图$G$，$V(G)=\{\delta_0^2,\delta_1^2,\cdots,\delta_m^2\}$，当且仅当$\delta_i^2$与$\delta_j^2$ ($i\times j\neq 0$)有公共的0-1标志的边时，δ_i^2与δ_j^2这两个顶之间连一边；δ_0^2与δ_i^2 ($1\leqslant i\leqslant m$)当且仅当δ_i^2的0-1标志边完全落在Δ^2的0-1标志边上时，在δ_0^2与δ_i^2之间连一边。

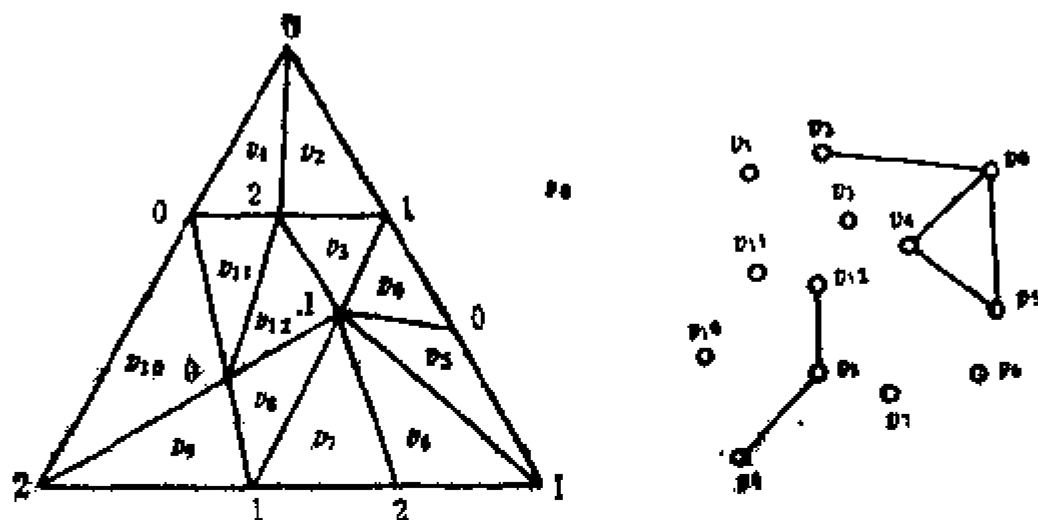


图 1.6

下面证明$d(\delta_0^2)=$odd。事实上，$d(\delta_0^2)$是Δ^2上0-1边以0,1为端点的小区间的个数。若Δ^2的这条边的内点无小三角形之顶，则$d(\delta_0^2)=1$；若Δ^2这条边内点有小三角形之顶，且这些小三角形之顶皆标以0或1，亦有$d(\delta_0^2)=1$；若Δ^2这条边内点上0与1标号都有，我们把两端标号一致的小区间缩成一点，标号不变。这时，Δ^2这条边上标号为0101…01，这里有奇数个小区间端点分别标以0与1，所以$d(\delta_0^2)=$odd。

由推论1，$\delta_1^2,\cdots,\delta_m^2$中奇次顶是奇数个，且$d(\delta_i^2)<3$，故$\delta_1^2,\delta_2^2,\cdots,\delta_m^2$中的奇次顶只能是一次的；仅当$\delta_i^2$是正态三角形时，$d(\delta_i^2)=1$，故正态三角形的个数是奇数。**证毕**。

图1.6中把证明中的δ^2改成v,v_2,v_9,v_{12}是三个一次顶，即

正态三形角是三个。

定理 4 (Brouwer) f: $\Delta^2 \to \Delta^2$**是连续映射，则** $\exists x_0 \in \Delta^2$，**使得**$f(x_0) = x_0$。

证 设 x_0, x_1, x_2 是Δ^2的三个顶点，则Δ^2上任一点 x 可唯一地表成

$$x = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

其中$a_i \geqslant 0 (i = 0, 1, 2)$，$\sum_{i=0}^{2} a_i = 1$。这里写的$x, x_0, x_1, x_2$是二维向量。记$x = (a_0, a_1, a_2)$，$f(x) = (a'_0, a'_1, a'_2)$。令$S_i = \{(a_0, a_1, a_2) | (a_0, a_1, a_2) \in \Delta^2, a_i \geqslant a'_i\}$，$i = 0, 1, 2$。只欠证明$\bigcap_{i=0}^{2} S_i \neq \phi$。若这是真的，则$\exists (a_0, a_1, a_2) \in \bigcap_{i=0}^{2} S_i$，且$a'_i \leqslant a_i$，$i = 0, 1, 2$；又$\sum_{i=0}^{2} a'_i = \sum_{i=0}^{2} a_i$，故有$(a'_0, a'_1, a'_2) = (a_0, a_1, a_2)$，即$(a_0, a_1, a_2)$为$f$的不动点。

为此，考虑Δ^2的一个单纯剖分正态标志，使得标 i 的每个顶属于S_i，$i = 0, 1, 2$。事实上，Δ^2上任一点x，$x = (a_0, a_1, a_2)$，$f(x) = (a'_0, a'_1, a'_2)$时，存在一个$S_i$，使$x \in S_i$，且$a_i > 0$；否则对每个$a_i > 0$时，$a'_i > a_i$，于是$\sum_{i=0}^{2} a'_i > \sum_{i=0}^{2} a_i$，矛盾。我们如下地标志：一个三角形顶点$x \in S_i$且$a_i > 0$时，$x$标以$i$。这种标志是正态标志，例如$\Delta^2$的顶点$x_i (i = 0, 1, 2)$有$a_i = 1$，故$x_i \in S_i$，标成$i$；在$\Delta^2$ $x_0 x_1$边上各点的$a_2 = 0$，我们只能把这边上的点标以0或1；$x_0 x_2$边上的点同理只能标0或2；$x_1 x_2$上的点只能标1或2，故为正态标志。

由定理3，至少有一个正态三角形，其顶点分别属于S_0，S_1，S_2。我们使剖分无限变密，且小三角形有任意小的直径，则S_1，

S_2, S_3中有三个点相距可以任意小，又 f 连续，故 $S_i(i=0,1,2)$ 是闭集，于是 $\bigcap_{i=0} S_i \neq \phi$。证毕。

1.5 Dijkstra 算法

给定连接若干城市的铁路网，找一条给定二城市间的最短铁路路线，这是一个极普通的实际问题。这个问题的数学模型如下：

$w=w(e)$ 是定义域为$E(G)$的实函数，称$w(e)$为图G的边e之权，G叫做加权图，记

$$W(G)=\sum_{e\in E(G)} w(e),$$

$W(G)$ 叫做图G的权。我们求满足某种条件的子图H，且使其权最小，即

$$W(H)=\sum_{e\in E(H)} w(e)=\min,$$

其中 $H\subseteq G$，且有某种指定的性质。上述铁路问题即在连通图G中的任给定的两顶 u,v 之间找出一条轨 $P_0(u,v)$，使得

$$W(P_0)=\min_{P\in \mathscr{P}(u,v)}\{W(P)\},$$

$\mathscr{P}(u,v)$ 是从 u 到 v 的轨集合。这里，我们称 $W(P_0)$ 为 u 与 v 的距离，记成$d(u,v)$。

边的权在友谊图中可以代表两个朋友的感情深厚的程度；在通讯图中，边的权可能代表有线通讯线路的造价或维修费用，等等。许多不同的实际问题，其数学模型与上述铁路网上的最短路线问题的数学模型是一致的。

下面介绍求顶点$u_0\in V(G)$到连通图G的各个顶点最短轨的一个有效算法。

所谓算法，是指一组有穷规则，它准确告知，为解决给定的

问题，何时应做何种操作。

算法的表述方式有三种：（1）直叙式，（2）框图式，（3）算法语言表述。本书的一切算法皆以直叙式表出，待上机执行时，再将其转述成算法语言。图论算法的设计和分析是一个引人入胜的领域，也是与计算机科学技术关系最为密切的领域之一。

定义 7 一个图论算法的计算量$f(v,e)=O(P(v,e))$时，则称此算法为有效算法或好算法，其中$P(v,e)$是某个多项式，v与e分别是图的顶数与边数。

Dijkstra算法（u,v不相邻时，$w(uv)=\infty$）

（1）令$l(u_0)=0$；$l(v)=\infty$，$v\neq u_0$；$S_0=\{u_0\}$，$i=0$。

（2）对每一个$v\in\bar{S}_i$（$\bar{S}_i$指S_i以外的顶所成之集合），用$\min\{l(v),l(u_i)+w(u_iv)\}$代替$l(v)$；设$u_{i+1}$是使$l(v)$取最小值的$\bar{S}_i$中的顶，令$S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$；

（3）若$i=v-1$，止；若$i<v-1$，用$i+1$代替i，转（2）。

由上述算法知：

（1）S_i中各顶标$l(u)$即为u_0到u的距离。又因$v<\infty$，故有限步之后，$V(G)$中每一顶都标志了与u_0的距离，从而可以找到各顶到u_0的最短轨。

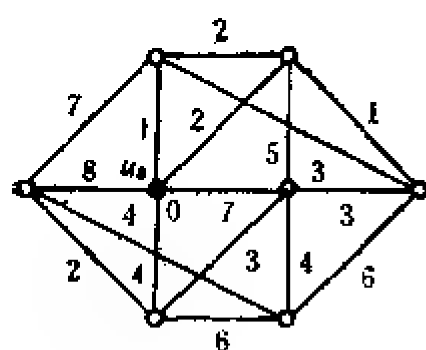
（2）Dijkstra算法的时间复杂度$f(v,e)=O(v^2)$，所以是有效算法。

例 13 求图1.7中由顶u_0到各顶的最短轨道及距离。

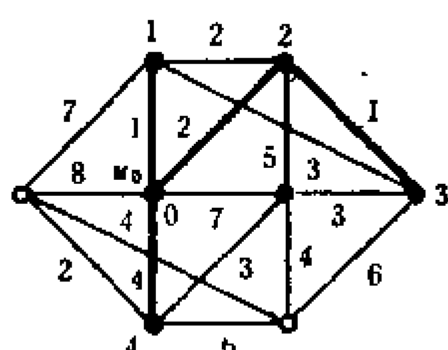
（h）中各顶标即该顶至u_0的距离，而u_0至各顶的最短轨可按图中粗实线找到。

作为本章的结尾，应当提请读者注意的有以下几点：

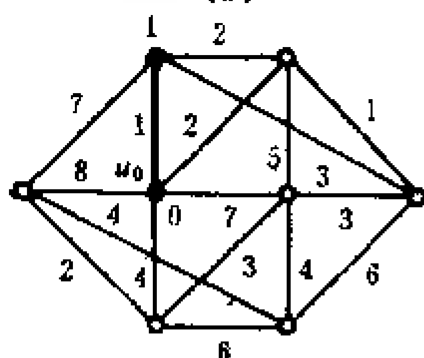
（1）我们在图论中研究的图，并非几何图形、工程图或美术图画，它表现的只是顶点集合上的二元关系，其本质是抽象的概念；我们之所以画成图示，只是为了直观示意，或者认为是所考



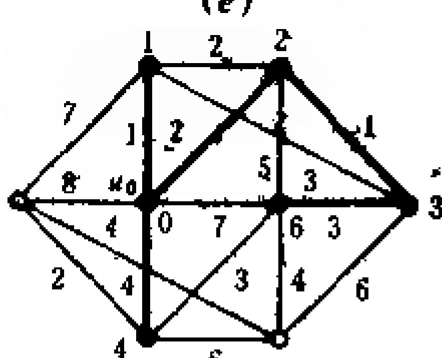
(a)



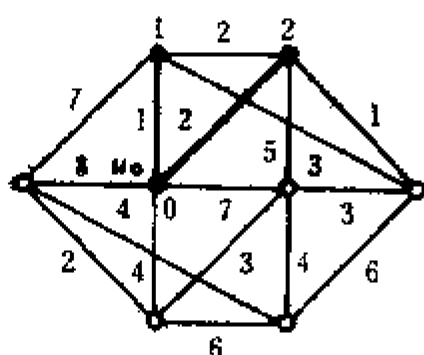
(e)



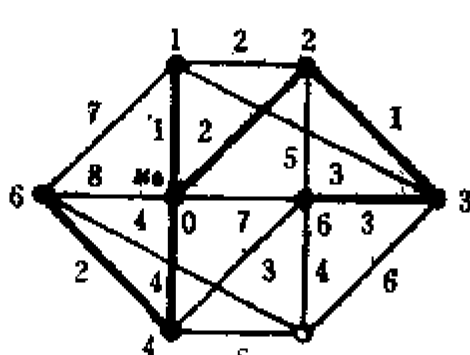
(b)



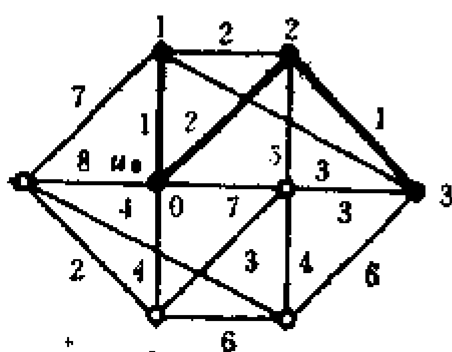
(f)



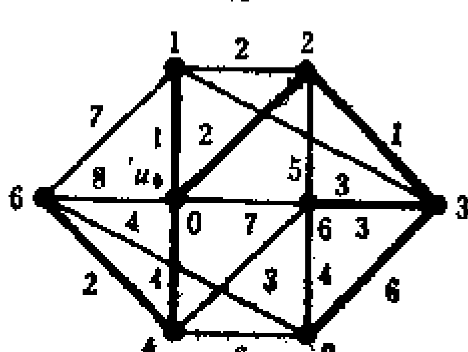
(c)



(g)



(d)



(h)

图 1.7

虑的图的同构物，所以边的曲直长短，顶点的位置，都没有关心的必要。它们的几何性质与图的性质并不相关，这一点说明图其实是一维拓扑学的研究对象。

（2）我们讲了图论简史，应着重领会的是，千万不要不加分析地瞧不起游戏性的问题。有些游戏问题可能成为一门很有生命力的学科的“种子”，例如七桥问题以及周游世界的游戏。但是，并非一切游戏性问题（往往又难又有趣）的解决引出的方法与概念都有如此之大的意义。社会生产对其要求（或者说依赖）的程度才是该门学科发展的决定因素。图论前两百年停滞不前，而后五十多年，尤其是近二十多年来，则高速发展，道理盖出于此。

（3）本章只是图论的一个开头，就冒出这么多的概念、术语和符号，以后各章中的概念有增无减。这也是图论学科的一个特色，而且同一个概念中的术语符号往往因作者而异，目前看来，术语符号统一的可能性不太大，本书尽可能使用学术界较为流行的一些术语。

图论的概念为数甚多，未必逐字记忆，要多画示意图，从正反两个方面把本质和易于误解的地方搞清楚。

（4）Euler 公式 $\sum_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$、轨和圈是本章引出的三个主要内容，尤其是轨与圈是以后各章讨论的中心。

（5）本章给出的Brouwer不动点定理的证明，例证了图论方法对连续统中的某些数学问题亦是可以有所贡献的，而且解决得甚为奇妙直观又不失严格性。我们的目的是唤起读者用图论方法解决各种理论问题的自觉性。

（6）算法是计算机科学中的中心课题之一，本章通过Dijkstra 算法，示范图论算法的设计与表达方式，树立有效性观点。Dijkstra 算法本身是解决最优化问题的重要工具之一。我们应当明了其思想，而且要会用。

（7）本章提供了不少习题，以后各章也不会太少。大家一

定体会到，与数学分析等非离散数学的味道很不一样，图论代入公式的机会非常之罕见，几乎每个题目都要求我们自行设计一个思路，不少题目“貌似简朴，实则困难”，怎么对付它？多做习题，训练图论的机敏性，积累经验。

习　　题

1．从日常生活中举出五个实例，它们的数学模型是图。

2．G是单图，则 $\varepsilon\leqslant\binom{\nu}{2}$。

3．（1）$G\cong H$，则$\nu(G)=\nu(H)$，$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$。

（2）（1）之逆不真。

4．画出不同构的一切四顶单图。

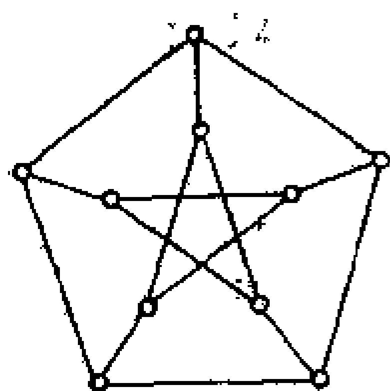
5．一间房子里有$N(>3)$个人，至少有一个人没有和房子里每个人握手，房子里可能与每个人握手的人数的极大值是几？

6．把1，2，3，4，5任意划分成两个集合，则必然有一个集合包含两个数及其差。

7．任何两个以上的人组成的人群中，至少有两个人，他们的朋友数一样多。

8．$2n$个$(n\geqslant2)$人中每个人至少同其中n个人相识，则其中至少有四个人，使得这四人围圆桌而坐时，每个人旁边是他认识的人。

9．证明下面两图同构（图 1.8）。



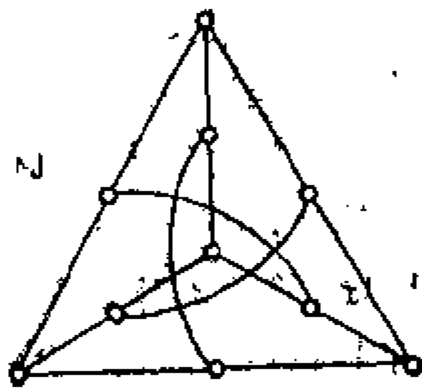


图 1.8

10. $G\cong H$ 的充要条件是存在可逆映射

$$\theta: V(G)\to V(H),$$

使得$uv\in E(G)$，当且仅当$\theta(u)\theta(v)\in E(H)$，其中$G$与$H$是单图。

11. G是单图，则 $\varepsilon=\binom{\nu}{2}$的充要条件是$G\cong K_\nu$。

12. (a) $\varepsilon(K_{m,n})=mn$。(b) G是完全二分图，则$\varepsilon\leqslant\nu^2/4$。

13. 在一次象棋比赛中，任意两名选手之间至多只下一盘，则总能找到两名选手，他们下过的盘数恰好一样。

14. 上题中，若每名选手与其余的选手都比赛过，人数是n，求总盘数。

15. 一个旅游小组，其任意4人中至少有1人以前见过另外三人，则任意4人中有1人，他早就见过旅游小组（至少有4人）内其余的每个人。

16. 一个图，每顶次数至少是2，则图中有圈。

17. n个运动队之间安排一项竞赛，已赛完$n+1$局，求证存在一个队，它已至少参加过3局比赛。

18. $A\subseteq V(G)$，k是恰有一个端点在A内的边的条数，若A内奇次顶的个数是偶数，则k为偶数；否则，k为奇数。

19. 一些圆面覆盖平面上取定的$2n$个点，每个圆至少盖住$n+1$个点，则任意两个点能由平面上的一条曲线所联结，这曲线整个地被一些圆所覆盖。

20. 每顶皆2次的连通图是圈。

21. 是否有这种不连通单图，$\nu\leqslant6$，而每顶次数皆2。

22. 有多少顶点为6个的单图，每顶次数为2？

23. k维立方体是顶点为分量取0或1的k维向量，又当且仅当它们只一个分量不相同时，此二顶之间连一边。证明k维立方体有2^k个顶，$k2^{k-1}$条边，且是2分图。

24. K_ν^c与$K_{m,n}^c$是什么样的图？

25. $G^c\cong G$，则称G自补，若G自补，则$\nu(G)\equiv0$或$1\pmod4$。

26. 有多少$v=5$的自补单图？

27. 每个n顶单图与K_n的一个子图同构。

28. 完全图的每个导出子图仍是完全图。

29. 二分图的任一子图仍是二分图。

30. 求一个二分图，它不与任何k维立方体的子图同构。

31. G是单图，整数n满足$1<n<v-1$，证明若$v\geqslant 4$，且G的所有的n个顶的导出子图都有相同的边数，则$G\cong K_v$或$G\cong K_v^c$。

32. $\delta\leqslant 2\varepsilon/v\leqslant\Delta$。

33. 一个k次正则二分图有顶集划分$V(G)=X\cup Y$，则$|X|=|Y|$。

34. $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_v\}$，则称$d(v_1)$，$d(v_2)$，$\cdots$，$d(v_v)$为$G$的次数序列，证明非负整数序列$d_1,d_2,\cdots,d_v$是个图次数序列的充要条件是$\sum\limits_{i=1}^{v}d_i=\text{even}$。

35. 单图次数序列叫做图序列，证明

(a) 7，6，5，4，3，3，2与6，6，5，4，3，3，1不是图序列。

(b) $d_1,d_2,\cdots,d_n$是图序列，且$d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots d_n$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$是偶数，且对$1\leqslant k\leqslant n$，

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\}.$$

36. $d_1,d_2,\cdots,d_n$是非负整数非增序列，d'是序列d_2-1，$d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n$，证明

(a) $d_1,d_2,\cdots,d_n$是图序列的充要条件为d'是图序列。

(b) 给出一个由图序列构作单图的算法。

37. 无环图G包含一个二分生成子图H，使得$d_H(v)\geqslant\frac{1}{2}d_G(v)$

对一切$v\in V(G)$成立。

38. $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为平面点集，且任二点相距至少为1，则相距恰为1的点对少于$3n$个。

39. 图G的边图是以$E(G)$为顶集，又当且仅当G中两条边相邻时，在边图中此二顶相邻，证明若G为单图，则G的边图有$\varepsilon(G)$个顶，$\sum\limits_{v\in V(G)}\binom{d_G(v)}{2}$条边。画出$K_5$的边图。

40. G是单图，$\delta\geqslant k$，则G有长k的轨。

41. G是连通图的充要条件是$V(G)$的每个分成两个非空子集V_1,V_2的划分，总存在一边，它的两端分别属于V_1与V_2。

42. G是单图，$\varepsilon>\binom{\nu-1}{2}$，则$G$连通。

43. $\nu>1$，画一个非连通单图，使$\varepsilon=\binom{\nu-1}{2}$。

44. G是单图，$\delta>\left[\frac{\nu}{2}\right]-1$，则$G$连通。

45. (a) $e\in E(G)$，则$\omega(G)\leqslant\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$。

(b) $v\in V(G)$，则(a)中$G-e$未必可由$G-v$代替，其中$\omega(G)$是G的连通片数目。

46. G连通，每顶皆偶次，则$\omega(G-v)\leqslant\frac{1}{2}d(v)$。

47. 连通图两条最长轨有公共顶。

48. G中顶u,v连通时，u,v之间的距离定义为u,v之间最短轨之长；u,v不连通时，规定其距离为∞，证明$d(u,v)+d(v,w)\geqslant d(u,w)$，其中$u,v,w\in V(G)$，$d(u,v)$表示$u$与$v$之距离。

49. G的直径大于3，则G^c的直径小于3。

50. 直径为2的单图，$\Delta=\nu-2$，则$\varepsilon\geqslant 2\nu-4$。

51. G是连通单图，G不是完全图，则G中有三个顶点u,v,w，使得$uv,vw\in E(G)$，而$uw\notin E(G)$。

52. $e\in E(G)$，e 在一个闭行迹上，则 e 在一个圈上。

53. $\delta\geqslant 2$的图中有圈。

54. G是单图，$\delta\geqslant 2$，则G中有长至少为$\delta+1$的圈。

55. 一个围长为4的 k 次正则图至少有 $2k$ 个顶；有 $2k$ 个顶时，图在同构意义下是唯一的。

56. 围长为5的 k 次正则图至少有 k^2+1 个顶。

57. (a) $\varepsilon\geqslant\nu$，则G中有圈。

(b) $\varepsilon\geqslant\nu+4$，则$G$中有两个无公共边的圈。

58. 一公司在六个城市有分公司 $c_1, c_2, \cdots, c_6$，下面矩阵的 (i,j) 号元素是c_i到c_j的飞机票价，试为该公司制作一张由c_1到各公司去的最便宜的通航线路图，

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}.$$

59. 船公把一只老狼、一只小羊和一头大白菜运过河。船小，一次只能运走一宗，为安全起见，不能让狼与羊，或羊与白菜无人看管时在一起，试问应如何运送最省时又安全？

60. 两人有酒，装满8斤之瓶，另有能装5斤与3斤的空瓶各一只，今欲平分其酒，请设计一个最简便的方法。

61. Brouwer 不动点定理证明中"S_i是闭集"一语何以正确，试加证明。

62. 正四面体到自身的连续映射有不动点。

63. 有 n 个药箱，每两个药箱中有一种相同的药，每种药恰好在两个药箱中出现，问共有多少种药？

64. $\nu=n, \varepsilon=n+1$，则$\exists v\in V(G)$，使得$d(v)\geqslant 3$。

65. 俱乐部有14人想打桥牌，过去每个人都曾与其中5个人合作过；现规定四人中必须任何两个人都未合作过才准许在一起打一局，在这种规定之下，只打了三局就无法续继进行，这时新来了一位年轻人，试证明有这个年轻人参加，一定还可以再打一局。

66. 任何9个人中必有三人相识或四人彼此不相识。

67. 把K_{18}的边染成红色或兰色，证明不论如何染，一定可以找到四个顶，它们导出的K_4是同色的。

68. 从K_n中删除至少几条边，才能得到不连通图，且有一个连通片含n'个顶$(1 \leqslant n' < n)$？

69. n个人参加一次会议，其中有相识者，每两个相识者皆无共同的熟人，而每两个不相识者恰有两个共同的熟人，则每人都有同样数目的熟人。

70. 在接线柱A, B之间连接着一些电阻，试问至少要多少个电阻，怎么联接，才能使任意损坏9个电阻时，电路仍连通且不短路？

71. 从敌区铁路交通图上发现，要使两个城市v_1, v_2的铁路交通完全中断，至少要炸毁k段铁路。若有一城市v_3与v_1, v_2之间各有一段铁路e_1, e_2相通，证明把e_1, e_2炸毁后，至少还要炸坏$k-1$段铁路，才会使v_1, v_2之间的铁路交通中断。

72. 长为奇数的回路必含圈，试证明之。长为偶数的回路是否一定含圈？

73. 在k次正则图中，$kv \equiv 0 \pmod{2}$。

74. G是连通图，$v \geqslant 2, e < v$，则G中至少有两个一次顶。

75. 直径为d围长为$2d+1$的图是正则图。

2 树

2.1 树及其性质

树在我们这里是一个数学概念，它是在各种各样的图中，极为简单又极为重要的一类图．树在各个不同的领域中有广泛的应用．对于图论学科本身，树扮演着一种特殊的角色，那就是，一个一般的图论难题或猜想提出之后，大都首先用树来探讨其真伪．有的问题往往对一般图难以解决，而对于树，则可以圆满解决．本章只考虑单图．

定义 1　无圈连通图叫做树，用T表示；T中$d(v)=1$的顶v叫做叶；每个连通片皆为树的图叫做林．孤立顶叫做平凡树．

图 2.1 是一个林，每个连通片皆为树．

定义 2　树T是图G的生成子图时，T称为G的生成树；从G中把T之边删除得到的图$G-E(T)$叫做G的余树成树余．

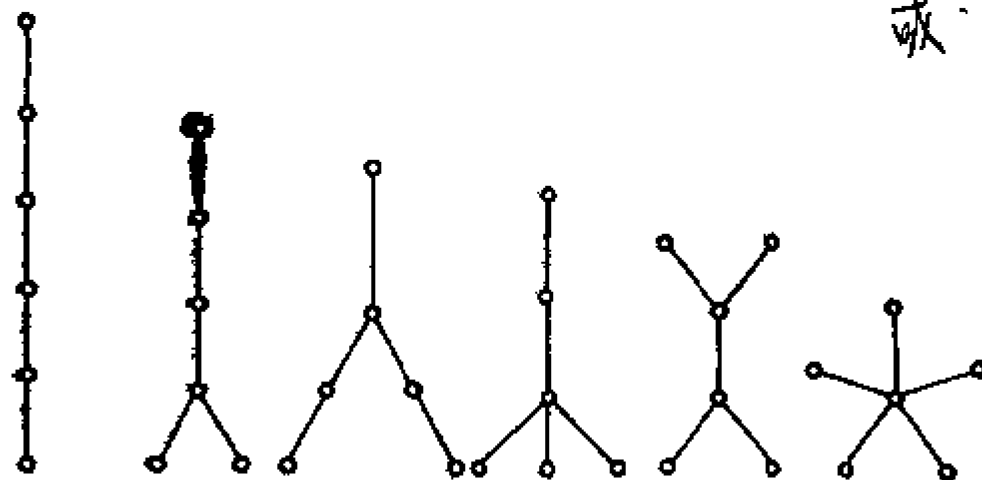


图 2.1

图 2.2 中粗实线表示生成树，细实线是余树边．可见余树可能不连通．

为了充分认识树的图论特征，我们下面给出树的六个等价命题。

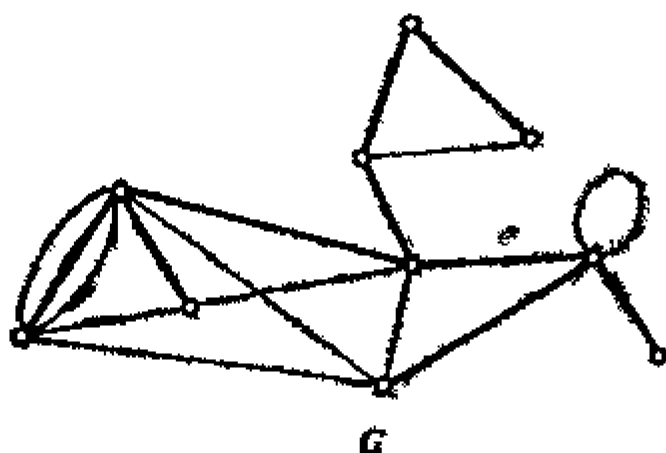


图 2.2

定理 1 下面的六个命题等价：

(1) G是树。

(2) G中任二顶之间有且仅有一条轨。

(3) G中无圈，且 $\varepsilon=\nu-1$。

(4) G连通，且 $\varepsilon=\nu-1$。

(5) G连通，$\forall e\in E(G)$，$G-e$ 不连通。

(6) G无圈，$\forall e\overline{\in} E(G)$，$G+e$ 恰有一个圈。

证 (1)⇒(2) 因为G是树，连通，故$\forall\ u,v\in V(G)$，$\exists$轨 $P_1(u,v)$；若还存在$P_2(u,v)\neq P_1(u,v)$，当我们沿P_1由u走向v时，P_1上一定存在两个顶w_1,w_2，w_1与w_2是P_1与P_2的两个公共顶，但在w_1与w_2之间P_1上再无其它与P_2公共的顶，且使得P_1与P_2在w_1与w_2之间的部分合成一个圈，与G为树无圈相违。可见（2）成立。

(2)⇒(3) 若G中有圈，则此圈上任二顶之间有两条不同的轨，与（2）相违，故G中无圈。

下面用关于ν的归纳法证明$\varepsilon=\nu-1$。

$\nu=1$时，$\varepsilon=0$，$\nu=2$时，$\varepsilon=1$，$\varepsilon=\nu-1$成立。

假设$\nu\leqslant k$时，（3）已成立，考虑$\nu=k+1$的情形。这时，若u与v是G中两个邻顶，取$G_0=G-uv$，在G上u与v之间只有一条轨即边uv，故G_0中u与v之间无轨道，G_0不连通，但G_0显然只有两个连通片G_1,G_2，在G_1与G_2中，两顶之间只有一条轨，由归纳法假设，$\varepsilon_1=\nu_1-1$，$\varepsilon_2=\nu_2-1$，$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+1=\nu_1+\nu_2-2+1=\nu-1$。即（3）成立。

（3）⇒（4）　只欠证G连通．若G不连通，$G_1,G_2,\cdots$，G_ω（$\omega\geqslant2$）是G的连通片，则$\varepsilon_i=\nu_i-1$，这是因为G_i是连通无圈图，即G_i是树，故对G_i，（3）成立；于是$\varepsilon=\nu-\omega$，与$\varepsilon=\nu-1$相违，故G是连通图．

（4）⇒（5）　只欠证$\forall e\in E(G)$，$G-e$不连通．因为$\varepsilon(G-e)=\varepsilon(G)-1=\nu-2$，只要我们证出连通图的必要条件是$\varepsilon\geqslant\nu-1$，则可得出$G-e$不连通的结论．

事实上，$\nu=2$的连通单图满足$\varepsilon=\nu-1$．假设$\nu\leqslant k$的连通图$\varepsilon\geqslant\nu-1$，对于$\nu=k+1$的连通图，考虑$G-v$，其中$v\in V(G)$．

（i）若$G-v$仍连通，则$\varepsilon(G-v)\geqslant k+1-1-1=k-1$，而$\varepsilon(G)\geqslant\varepsilon(G-v)+1$，于是$\varepsilon\geqslant k$，即$\varepsilon\geqslant\nu-1$．

（ii）若$G-v$不连通，$G_1,G_2,\cdots,G_\omega$是$G-v$的连通片，$\omega\geqslant2$，由归纳法假设，$\varepsilon_i\geqslant\nu_i-1$，$i=1,2,\cdots,\omega$，

$$\varepsilon(G-v)\geqslant\sum_{i=1}^{\omega}\nu_i-\omega=k+1-1-\omega=k-\omega,$$

而$\varepsilon\geqslant\varepsilon(G-v)+\omega$，故$\varepsilon\geqslant k=\nu-1$．

（5）⇒（6）　先证G中无圈．若G中有圈，从G的圈上删除一边所得之图仍连通，与（5）相违，故G中无圈．

下证$G+e$恰含一个圈．事实上，（5）说G连通，上面又证出G无圈，故G是树，从而（2）成立，即任二顶间仅有一轨相连，所以$G+e$必有含e的圈；若$G+e$中有两个含e的圈，则$G+e-e=G$中仍有一个圈，与G中无圈矛盾．

（6）⇒（1）　只欠证G连通．$\forall u,v\in V(G)$，若u与v相邻，则u与v连通；若u与v不是邻顶，由（6）知$G+uv$只含一圈，即G中u与v之间有轨，故u与v亦连通、由u与v之任意性，G是连通图．**证毕．**

推论 1　非平凡树至少两个叶．

证　T为非平凡树，则$\varepsilon(T)=\nu(T)-1$，又

$$2\varepsilon = \sum_{i=1} d(v_i) = 2(\nu - 1);$$

T是连通图，于是$d(v_i) \geqslant 1$，若全是不小于2次的顶，则

$$\sum_{i=1}^{\nu} d(v_i) \geqslant 2\nu, \qquad 与\sum_{i=1}^{\nu} d(v_i) = 2\nu - 2$$

矛盾，故至少有一个一次顶u，除u外，其余$\nu - 1$个顶次数之和为$2\nu - 3$。若除u外每顶次数不小于2，则它们的次数和$\geqslant 2(\nu - 1) = 2\nu - 2$，与它们的次数和为$2\nu - 3$矛盾。故除$u$外还至少有一个一次顶。**证毕**。

推论 2 G**连通的充要条件是**G**有生成树。**

证 充分性的证明不足道。

若G连通，设T是G的边数最少的连通生成子图，则$\forall e \in E(T)$，$T - e$不连通，由定理1（5）知T是树，即G有生成树。**证毕**。

例 1 顶数大于4的图G或其补图中含有圈。

证 若G中与G^c中皆无圈。设$G_1, \cdots, G_\omega$是G的连通片，$G'_1, G'_2, \cdots, G'_{\omega'}$是$G^c$的连通片，则$G$的边数为$\nu(G) - \omega$，$G^c$的边数为$\nu(G) - \omega'$，$G$与$G^c$边数之和为

$$\frac{1}{2}\nu(\nu - 1) = 2\nu - \omega - \omega',$$

$$\nu^2 - 5\nu + 2(\omega + \omega') = 0 \quad (\omega, \omega' \geqslant 1)$$

$$\nu^2 - 5\nu + 4 \leqslant 0.$$

解得$1 \leqslant \nu \leqslant 4$，与$\nu > 4$矛盾，故$G$或$G^c$中有圈。**证毕**。

例 2 连通图的无圈子图可以是生成树的一部分。

证 若G是树，命题自然成立。若G不是树，G中有圈C_1，设G'是G的无圈子图，则C_1上至少有一边e_1不在G'上，把e_1从G上删除，$G - e_1$仍连通。若$G - e_1$上仍有圈C_2，则C_2上有一边e_2不在G'上，把e_2从$G - e_1$上删除，$G - e_1 - e_2$仍

连通。

由于是有限图，这一过程会在（有限）k步后终止，终止时所得的从G中删去了一些圈上之边的图$G-e_1-e_2-\cdots-e_k$无圈连通，即它是树，于是G'是$G-e_1-e_2-\cdots-e_k$的一部分，且$G-e_1-e_2-\cdots-e_k$是G的生成树。**证毕**。

例 3 T_1, T_2是树T的子树，T_3是T_1与T_2公共边端点形成的顶子集的导出子图，则T_3也是树。

证 T_3显然无圈，只欠证T_3是连通图。任取两个顶u，$v\in V(T_3)$，则u，$v\in V(T_1)$，u，$v\in V(T_2)$。在T_1上有唯一的轨$P_1(u,v)$，在T_2上有唯一的轨$P_2(u,v)$；$P_1(u,v)$，$P_2(u,v)$都是树T上之轨，故$P_1=P_2$，即$P_1(u,v)$上的边亦是T_3上的边，从而$P_1(u,v)$是T_3的子图，即T_3上u与v两顶连通。由u，v之任意性得知T_3连通。**证毕**。

2.2 生成树的个数

顶点标志的连通图，除非它本身就是树，一般地，有不止一个生成树；我们把标志不同而同构的生成树视为不同的生成树，如此，一个小小的K_{10}竟有一亿棵生成树。本节给出一个求生成树个数的方法和完全图生成树个数的 Caylay 公式。

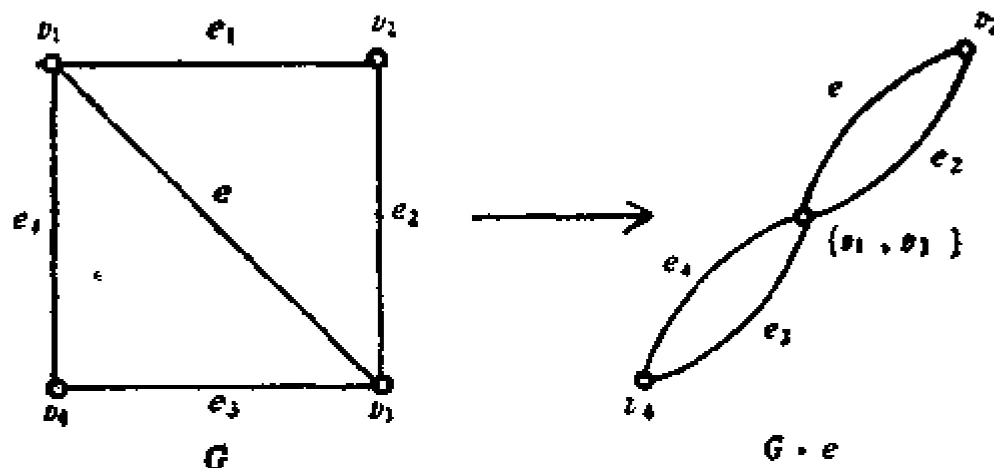


图 2.3

图G的一边e被收缩，是指从G中把e删除，再令其二端点重合成一个顶（图2.3）.所得之新图，记成$G\cdot e$。若e不是环，则显然有

$$\nu(G\cdot e)=\nu(G)-1,\ \varepsilon(G\cdot e)=\varepsilon(G)-1,$$

$$\omega(G\cdot e)=\omega(G)\ \ (\omega\text{是连通片个数})\text{.}$$

T是树，$T\cdot e$仍为树。

我们用$\tau(G)$表示标志图的生成树之个数。

定理 2 *e*是标志连理连G的非环状边，则有公式

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)\text{.}$$

证 G的含e的生成树与$G\cdot e$的生成树一一对应，即$\tau(G\cdot e)$是G中含e的生成树之个数。另一方面，G的不含e的生成树与$G-e$的生成树一一对应，即$\tau(G-e)$是G中不含e的生成树之个数，所以有

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)\text{。}$$ **证毕。**

例 4 求四边形带一条对角线的图的$\tau(G)$。

由图2.4知带一条对角线的四边形的生成树个数是8。

定理 3 (Caylay)．$\tau(K_n)=n^{n-2}$。

证 令K_n的顶集为$N=\{1,2,3,\cdots,n\}$，则由N中元素构成的长$n-2$的序列恰为n^{n-2}个。这是因为序列$t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}$ ($t_i\in N$)中的每个t_i有n种不同的取法。下面建立上述序列与K_n的生成树之间的一一对应系。关

任取定K_n的一个生成树T，及s_1是T中第一个（号码最小者）一次顶，取t_1为与s_1相邻的顶之号码，把s_1从T上删除，设s_2是$T-s_1$中第一个叶，取t_2为s_2在$T-s_1$中相邻的顶之号码，依此类推，即得由N中元素构成的长$n-2$的序列（图2.5）．最后剩下的是一个K_2。

反之，任给定由N中元素构成的长$n-2$的一个序列$t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}$，我们可以如下地画出一个生成树：s_1是N中不在$\{t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}\}$中的第一个号码，把$s_1$与$t_1$连一边；$s_2$是不在

$\tau(G)$

$= 8$

2.4

$\{t_2,t_3,\cdots,t_{n-2}\}$中的$N-\{s_1\}$的第一个号码，把$s_2$与$t_2$连一边。

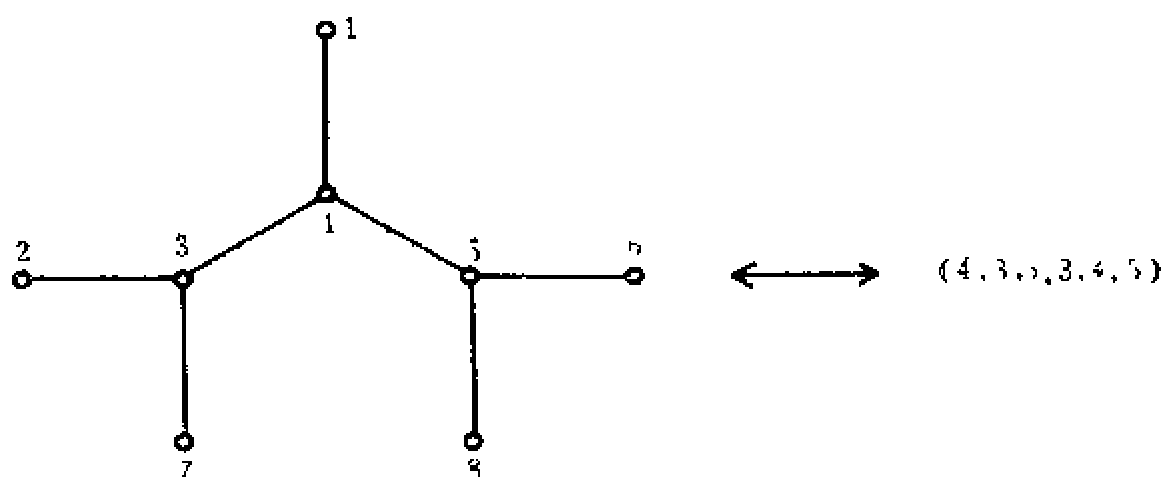


图 2.5

继续这一过程，得 $n-2$ 个边 $s_1t_1, s_2t_2, \cdots, s_{n-2}t_{n-2}$。再连接 $N-\{s_1,s_2,\cdots,s_{n-2}\}$ 中的两个顶，则得一个生成树。至此建立了 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}$ 型的（$t_i\in N$）序列与 K_n 生成树之间的一一对应，故 $\tau(K_n)=n^{n-2}$。**证毕。**

例如 K_{100}的生成树的个数是 $100^{98}=10^{196}$ 个。

2.3 Kruskal算法

今欲修筑连接几个城市的铁路，已知 i 城与 j 城之间的铁路造价为 c_{ij}，设计一个线路图，使总造价最低。

上述实际问题的数学模型为：在已知的加权连通图上求权最小的生成子图。显然它是一个生成树，这个生成树叫做最优树。下面介绍求最优树的 Kruskal 算法。

Kruskal **算法**：

（1）选 $e_1\in E(G)$，使得 $w(e_1)=\min$。

（2）若 $e_1,e_2,\cdots,e_i$ 已选好，则从$E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$中选取 e_{i+1}，使得

（i）$G[\{e_1,e_2,\cdots,e_i,e_{i+1}\}]$ 中无圈，且

(ii) $w(e_{i+1})=\min$。

（3）继续进行到选得 $e_{\nu-1}$ 为止。

其中 $G[E']$ ($E'\subset E(G)$) 叫做 E' 的导出子图，它是以

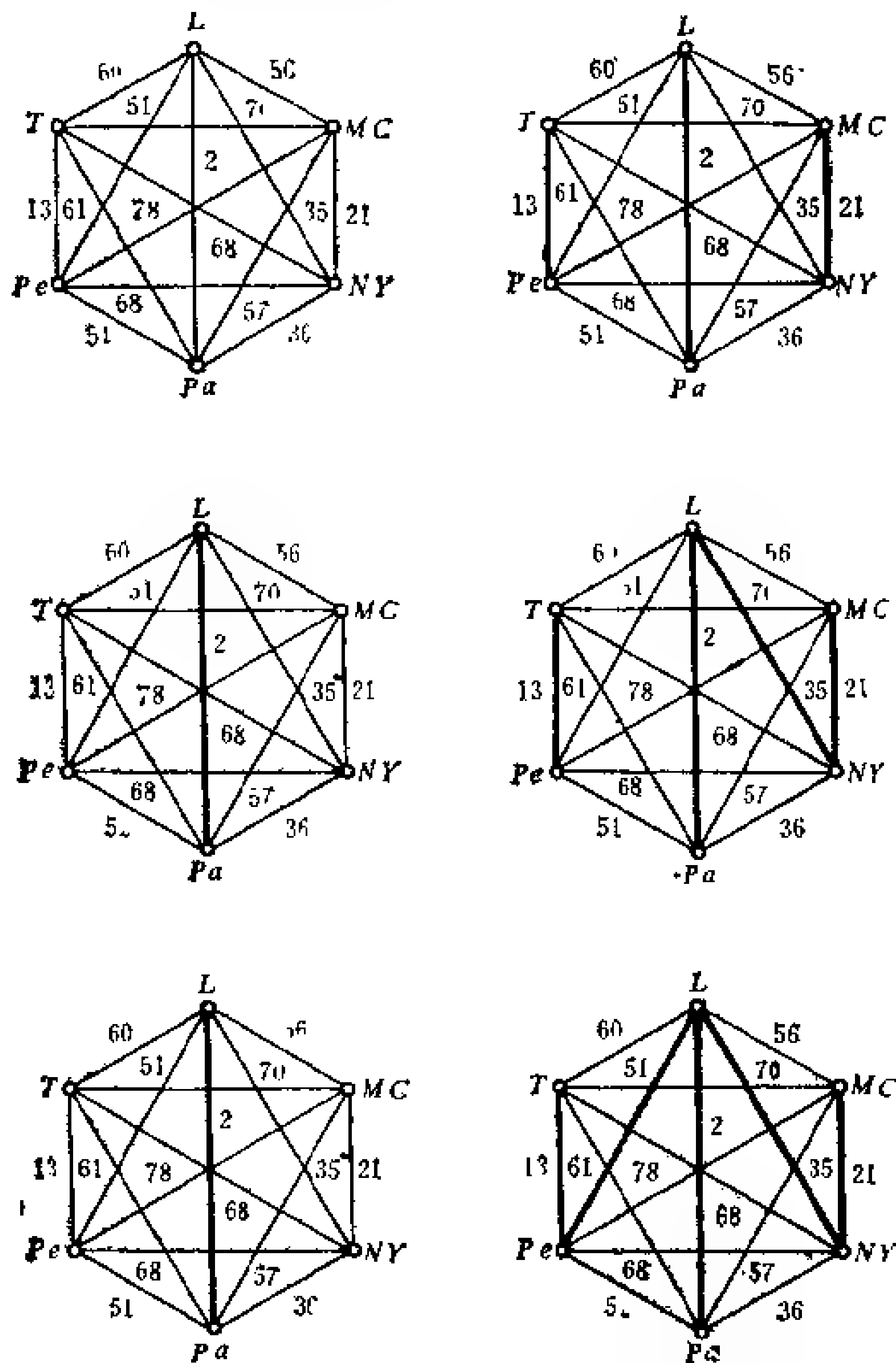


图 2.6

E' 为边集，以 E' 中边之端点为顶的图。

定理 4 Kruskal **算法选得的边的导出子图为最优树。**

证 Kruskal 算法得出的子图 T^* 是生成树自不待说。下证它的最优性。设 T^* 不是最优树，T_1 是 G 的任给定的一个生成树，$f(T_1)$ 是 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$ 中不在 T_1 上的 e_i 的足标 i 的最小值，令 T 是使 $f(T)$ 最大的一个最优树。因为 T^* 不是最优树，又 $E(T^*)=\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$，故 $e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}$ 中必有不在 $E(T)$ 中的边。设 $f(T)=k$，即 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$ 在 T 与 T^* 上，而 e_k 不在 T 上，于是 $T+e_k$ 中有一个圈 C。令 e'_k 是在 T 上而不在 T^* 上的边。且 e'_k 在 C 上。显然，$T'=(T+e_k)-e'_k$ 也是生成树，又 $W(T')=W(T)+w(e_k)-w(e'_k)$。由算法知，$e_k$ 本是使 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}]$ 上无圈的权最小的边，又 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e'_k\}]$ 是 T 之子图，也无圈，则有 $w(e'_k)\geqslant w(e_k)$。于是 $W(T')\leqslant W(T)$，即 T' 也是最优树，但 $f(T')>k=f(T)$，与 $f(T)$ 之最大性矛盾。**证毕。**

例 5 求下面加权图的最优树。（它的实际背景是北京与巴黎、纽约、东京、伦敦、墨西哥城这六大城市间的航空路线距离图，单位是百公里。）

图 2.6 中粗实线表示的是最优树，其权为 122。

2.4 几类常用树

本节介绍几类常用的有向树，为此首先提出有向图中的一些名词。

设 G 是有向图，$e=uv$ 是有向边，箭头从 u 画向 v，u 叫做边 e 之**尾**，v 叫做 e 的**头**。$W=v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$，有向边 e_i 的尾是 v_{i-1}，头是 v_i，$1\leqslant i\leqslant k$，则 W 叫做**有向道路**，**有向轨**是指 W 中顶点两两相异。$d^-(v)$ 表示以 v 为头的边做，$d^+(v)$ 表示以 v 为尾的边数。

2.4.1 有序二元树

定义 3 T是一个树，把有边规定一个方向且使得$\forall v_i \in V(T)$，$\exists$有向轨$P(v_0, v_i)$，则称T是外向树，v_0叫做根。把外向树之定向反过来，得到的有向树叫做内向树。

定义 4 T为外向树。$\forall v \in V(T)$，$d^+(v) \leqslant \sigma$，则称T为σ元树。当$e = uv$时，u称为v之父，v称为u之子；同父之子称为兄弟。除树叶外，每顶皆σ子时，称为典型σ元树。外向树每顶的儿子们有序时，叫做有序树，有序树之序列叫做有序林（外向树上的箭头可以省略）。

我们习惯于把有序林中一切树根画在同一水平线上，每一内顶（非叶）的儿子们从左到右有序地排列，且边不内交，叶在最下方。

例 6 画一个二元树，兄弟关系中，左为0右为1，试问下面(图2.7)的二元树上抄出的0-1密码表达什么信息：0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1。

解 上述0-1密码从二元树上译出为

Good Morning

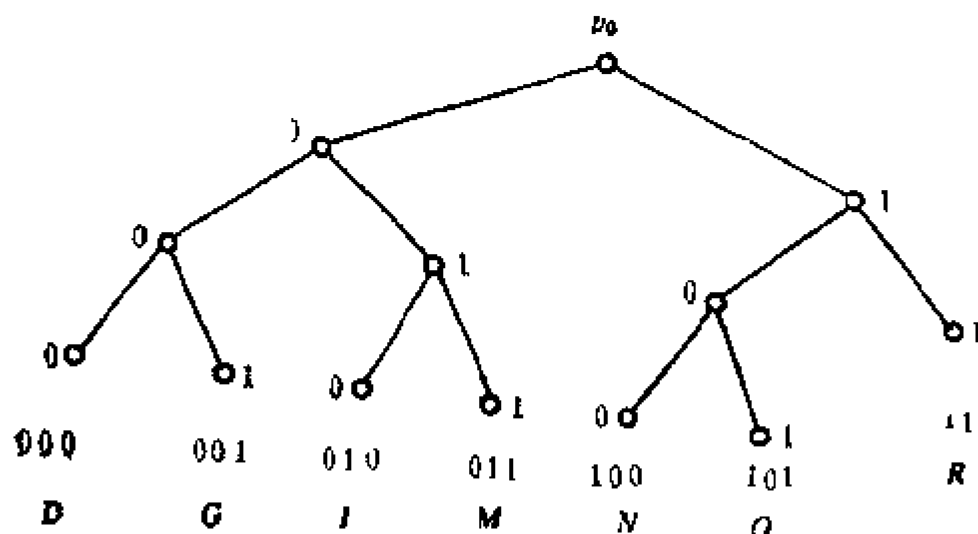


图 2.7

我们把从根到叶的有向轨上的0-1号码依次抄在该叶之下

方，再把各个叶下方的字符串收集起来，就得到一个二元树的所谓前缀码，例如图2.7中的前缀码为{000，001，010，011，100，101，11}显然，给一个前缀码，则可以画出一个唯一的有序二元树，前缀码与有序二元树一一对应。这样，可用前缀码代表一个二元树，这给机器表达有序二元树提供了方便。而任何有序树，都可以化成二元有序树，于是可以用计算机方便地处理有关有序树的问题。

按"左下方是儿子，右下方是兄弟"的规则，可以把有序树转化成有序二元树，而且这种转化是可逆的。同时这种规则还可以把有序林可逆地转化成有序二元树（只需把根也看成兄弟）。

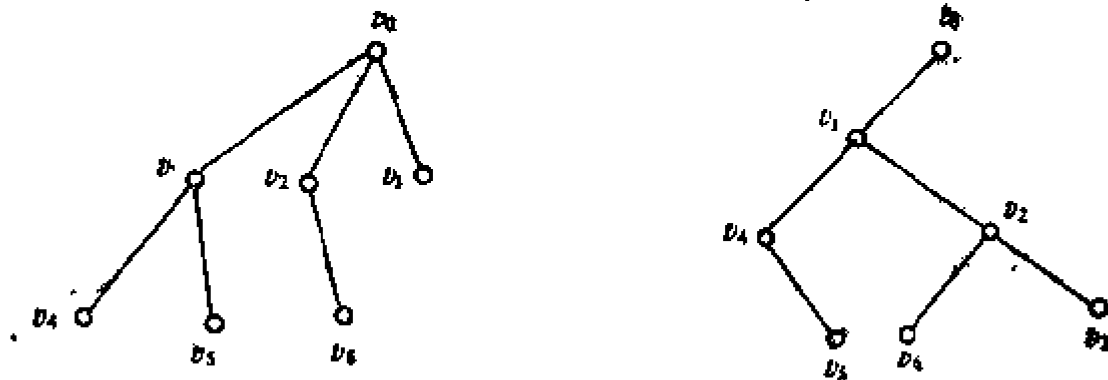


图 2.8

图2.8左图是一个有序树，右图是与之对应的有序二元树。v_0有三子v_1,v_2,v_3，v_1是长子，在相应的二元树中v_1画在v_0左下方，v_2,v_3做为v_1的兄弟依次v_2画在v_1的右下方，而v_3画在v_2的右下方；v_1有二子，长子v_4画在v_1左下方，v_5做为v_4的兄弟画在v_4的右下方；v_2只一个儿子v_6，v_6画在v_2的左下方。

图2.9是有序林画成有序二元树的示意图。

2.4.2 Catalan数

为了求得n顶有序二元树和n顶有序林的个数，我们介绍有趣的Catalan数。

括号列是指由左括号“(”和右括号“)”组成的有限序列。

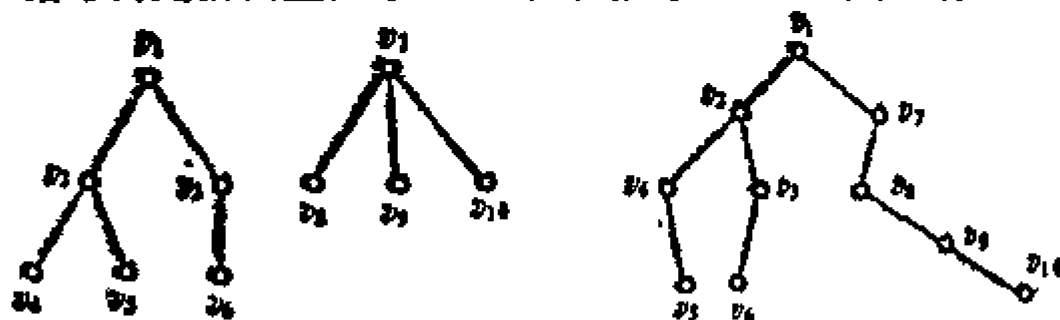


图 2.9

定义 5 好括号列是指

(1) 空列是好的；

(2) 若 A 与 B 是好括号列，则 AB 也是；

(3) 若 A 是好括号列，则 (A) 也是；

(4) 除 (1)、(2)、(3) 中的括号列外，再无其它好括号列（不是好括号列者，称为坏括号列）。

例如 (( )(())) 是好列，而 (( )))(() 是坏列。

定理 5 一个括号列是好括号列的充要条件是它由偶数个括号组成，其中半数是左括号，且从左向右读这个括号列时，读出的右括号个数不会超过读出的左括号个数。

证 若括号列是好列，显然它是由左括号占半数的偶数个括号组成的。下面用关于括号个数的归纳法证明从左至右读出的左括号的个数不少于右括号读出的个数。若括号数为 2，命题为真。设 m 个左括和 m 个右括的好列命题已真，我们考虑 n 个左括和 n 个右括组成的好括号列。其中 $m<n$。

(i) 若造此括号列时，最后一步是 (2)，此括号列形如 AB，A 与 B 皆非空好列，从左至右读时，只要还在读 A，由归纳法假设，读出的左括不比右括少，当我们读到 A 的最后一个括号时，读出的左、右括号个数一样。再读下去，即读 B，由归纳法假设，读出的右括号总数仍然不会超过读出的左括号总数。

(ii) 若造这个括号列时，最后一步是 (3)，命题显然成立。

下面证明由左括占半数的括号列，若从左至右读时读出的左括个数不少于右括个数，则此括号列是好列。仍用关于括号数的归纳法。括号数为2时，命题显然成立。假设 $m<n$ 时，m个左括和m个右括组成的括号列命题已真，考虑n个左括n个右括的括号列，从左向右读时，读了$2m$个括号后，读得的左右括号个数相等，由归纳法假设，读出的这个子列A是好括号列，右面未读的子列B也满足命题条件，由归纳法假设，B亦为好列，所以整个括号列AB也是好列。

若上述非空列A不存在，我们从左向右读时，读了第一个括号而未读其它括号时，由命题条件知第一个括号为左括。读到只剩一个括号未读时，已读出的左括不比右括少，而左括右括总数各占其半，故最后一个括号是右括，于是原括号列形如（A），A仍满足命题条件，由归纳法假设，A是好列，故（A）亦是好列。**证毕**

定理 6　由 $2n$ 个括号组成的好括号列个数是

$$c(n)=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

这个数 $c(n)$ 叫做 Catalan 数。

证　设 $p_1p_2\cdots p_{2n}$ 是n个左括n个右括构成的坏括号列。由定理5知，有一个前缀，其中右括比左括多。设 $p_1p_2\cdots p_j$ 的右括比左括多，且j最小，这时右括只比左括多1个，把从p_{j+1}开始的每个括号“翻”过来，则得$n-1$个左括$n+1$个右括的坏括号列，显然这一变换是可逆的，故n个左括与n个右括组成的坏括号列与$n-1$个左括$n+1$个右括组成的括号列一一对应。而$n-1$个左括$n+1$个右括组成的括号列共计C_{2n}^{n+1}个，n个左括n个右括组成的括号列共计C_{2n}^{n}个，所以$2n$个括号的好括号列共有

$$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1}$$

$$=\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!}-\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n)}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{n-1}C_{2n}^{n}.$$

证毕.

定理 7 **n个字符每个都要进入"先入后出"存储器S恰一次，进入S时是有序的，则出S的不同字符列共计可能有$c(n)$个.**

证 有字符进S时，记"（"，出S时记"）"，当n个字符全部出了S时，得到一个n个左括n个右括组成的$2n$个括号的括号列．由定理5，得到的是个好括号列．而且这种好括号列与出S的不同字符列之间一一对应，所以，由定理6，定理7得证.

证毕.

例 7 一个汽车队在狭窄路面上行驶，不得超车．但可以进入一个死胡同去加油，之后再插队行驶，共有n辆汽车，问可能有几种排列不同的车队开出城去？

例 8 饭后，姐姐洗碗，妹妹把姐姐洗过的碗一个一个放进碗橱摞成一摞．共有n个图样两两相异的碗，洗前也摞成摞，也许因为小妹贪玩，碗拿进橱子不及时，姐姐就把洗过的碗摞在旁边，问小妹摞起的碗可能有几种方式？

由定理7，例7与例8的答案都是$c(n)$.

2.4.3 有序2元树的个数

n个顶的有序二元树形形色色，n个顶的有序林更是如此，但它们的数目恰为$c(n)$.

定理 8 **n顶有序林和n顶有序二元树的个数皆为$c(n)$.**

证 把有序林中每个叶标以（ ），把其儿子们的标志分别是$w_1,w_2,\cdots w_r$的内顶标志以（$w_1w_2\cdots w_r$），最后从左到右根的标志分别为$x_1,x_2,\cdots,x_r$，整个林的标志是$x_1x_2\cdots x_r$．这一标志映射显然是可逆的，且$x_1x_2\cdots x_r$是$2n$个括号组成的好括号列，于是$2n$个括号组成的好括号列与n顶有序林之间一一对应．所

以，由定理 6，n 顶有序林的个数是 $c(n)$，又 n 顶有序林与 n 顶有序二元树之间一一对应，故 n 顶有序二元树的个数也是 $c(n)$。**证毕**。

定理 9 n **顶典型有序二元树的个数为** $c\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

证 容易看出，典型有序二元树的叶数 $L(T)$ 与内顶个数 $I(T)$ 满足 $L(T)=I(T)+1$. 所以有 $\frac{n-1}{2}$ 个内顶。而 n 顶典型有序二元树与 $\frac{n-1}{2}$ 个顶的定位二元树一一对应，因为把 n 顶典型有序二元树之叶全部揪去，则得 $\frac{n-1}{2}$ 个顶的有序二元树。显然，这种变换是可逆的。由定理 8，得知 n 顶典型二元树个数为 $c\left(\frac{n-1}{2}\right)$. **证毕**.

从这个定理证明中知 n 顶典型二元树的顶数 n 是奇数。

2.4.4 Huffman 树

由例 6 我们看到，若设计 26 个叶的有序二元树，每个叶代表一个英语字母，则可以用这个二元树上的叶码序列表示出任何一句话，进而任何一篇文章的信息。自然，我们希望总码长越短越好。粗略地讲，字母出现的频率小的（例如 Z）相应的叶码长一点还不怕，但字母出现的频率大的（例如 e）相应的叶码可不要太长，以期整个文章的总码长最短。

定义 6 v_0 **为根的** $v_1,v_2,\cdots,v_n$ **为叶的有序二元树中，轨** $P(v_0,v_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ **的长** l_i **叫做叶** v_i **的码长。若** v_i $(i=1,2,\cdots,n)$ **代表的事物出现的概率为** p_i，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，**使得**

$$m(T)=\sum_{i=1}^{n}p_i l_i=\min$$

的有序二元树 T 叫做带权 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树，也叫做最优二元树.

$m(T)$ 虽是 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 的 n 元函数，但 l_i 满足的条件是二元树上的根叶距，不易写出这些条件的表达式，所以这一条件极值问题，不能用传统的数学分析方法来解决，一般用下述的图论方法来解决.

下设 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$，$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为与之相应的叶.

定理 10 **(1) T 为 Huffman 树，v_i，v_j 是兄弟，则 $l_i = l_j$；(2) v_1 与 v_2 是兄弟；(3) 设 T^+ 是带权 $p_1+p_2, p_3, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树，与 p_1+p_2 相应的叶子生出两个新叶分别有权 p_1, p_2，则得到的树 T 即为带权 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树.**

证 (1) 由树上轨 $P(v_0, v_i)$ 及 $P(v_0, v_j)$ 的唯一性，以及 v_0 到 v_i, v_j 之父的轨的唯一性知，$P(v_0, v_i)$ 与 $P(v_0, v_j)$ 等长.

(2) 若 Huffman 树仅 v_1, v_2 两个叶，由 $m(T) = \min$ 知兄弟 v_1 与 v_2 的码长 $l_1 = l_2 = 1$. 若 T 有三个以上的叶子，则因 T 为二元树，有码长不小于 2 的叶. 又 $m(T) = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n = \min$，不妨设 $l_1 \geqslant l_i$，$i = 2, 3, \cdots, n$. 这是因为，若 $p_k = p_1$，而 $l_k > l_1$ $(n \geqslant k \geqslant 2)$，我们把 v_1 与 v_k 足标对换，得一同构树，$m(T)$ 不变，而使新树上 v_1 的码长大于 v_k 的码长. 若 $p_k > p_1$，而 $l_k > l_1$ $(n \geqslant k \geqslant 2)$，把 v_1 与 v_k 带权对换，得到的新树 T' 上 $m(T') = p_1 l_k + p_2 l_2 + \cdots + p_k l_1 + \cdots p_n l_n < m(T)$，与 $m(T)$ 最小矛盾. 故 l_1 不妨认为是最长的码长，且 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n$，若 v_1 无兄弟，则 l_1 还可缩短 1，这与 $m(T) = \min$ 矛盾. 故 v_1 的兄弟是 v_2.

(3) 设 T' 是带权 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树，只需证明 $m(T) \leqslant m(T')$. 由 (2)，带权 p_1 与 p_2 的叶在 T' 中是兄弟，令 T'_+ 是 T' 中 p_1 与 p_2 为权的叶删除，其父的权为 $p_1 + p_2$ 的树，则

$$m(T') = m(T'_+) + p_1 + p_2,$$
$$m(T) = m(T^+) + p_1 + p_2.$$

而 T^+ 是带权 $p_1+p_2, p_3, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树，故 $m(T'_+) \geqslant m(T^+)$，于是 $m(T) \leqslant m(T')$。**证毕.**

例 9 求带权 0.1，0.1，0.1，0.2，0.5 的 Huffman 树.

解 （d）中画出的是 Huffman 树（不是唯一解）.

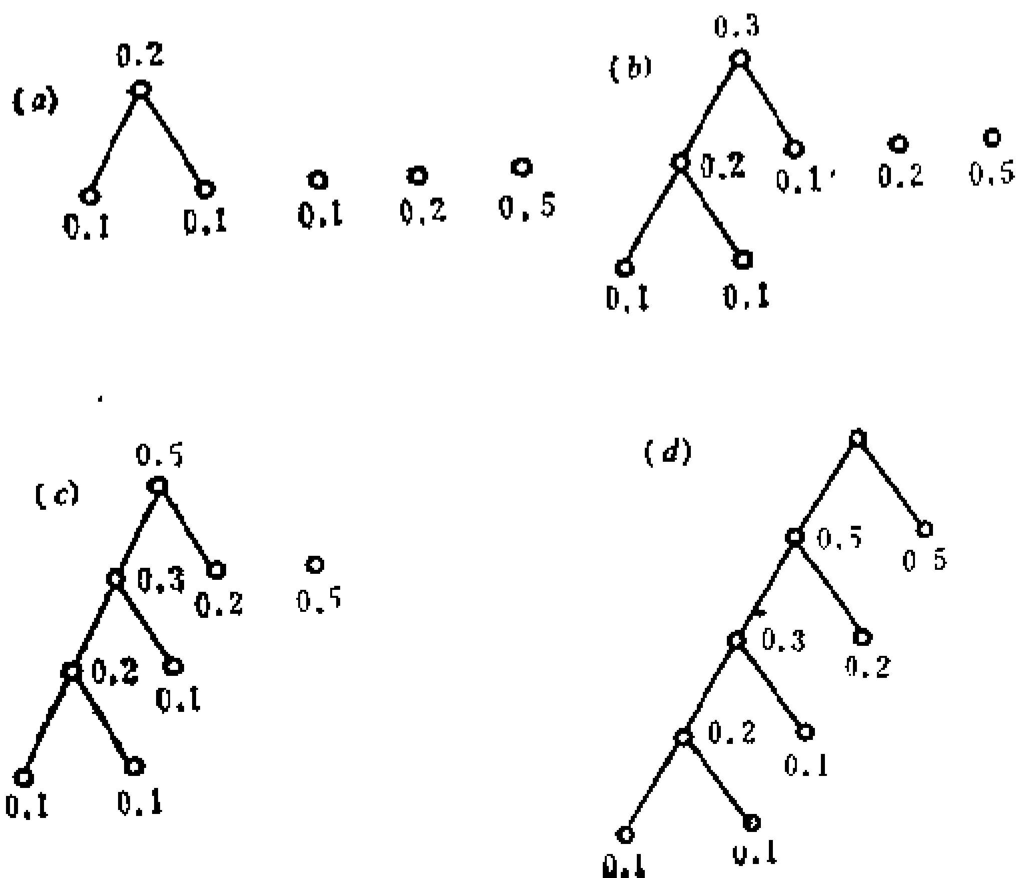


图 2.10

这里的解法是依据定理 10 进行的，这种方法称为"兄弟寻父法".

本章我们讨论了树的六种等价的说法，并且介绍了 Kruskal 求最优树的算法，它和第一章的 Dijkstra 算法都是最优化问题中的著名算法. 关于 Kruskal 算法，我们不仅看到它的可行性，而且还证明了它的正确性. 对于一个算法，起码的要求有三点：可行性、正确性和有效性. Kruskal 的时间复杂度为 $O(\nu^2)$. 由 Kaylay 定理（定理 3）知道，求 $\tau(G)$ 是没有好算法的，用公

式 $\tau(G)=\tau(G\cdot e)+\tau(G-e)$ 求 $\tau(G)$ 只对小图适用。

本章介绍的二元树、Catalan数、括号列方法和Huffman树，不但趣味盎然，而且很有实用价值。早在1857年，Caylay 就利用树研究有机物的分子结构，1847年，Kirchhoff 用树研究电网络。几乎所有应用图论的领域都要在相当大的程度上依靠树来解决某些重要问题。树，尤其是生成树（本书以后章节有几处还要讨论生成树）可以说是图的骨骼，从来是被重视的一个问题。

习　　题

1．非平凡树中最长轨的起点和终点是叶。

2．一个恰有两个叶的树是一条轨。

3．$\Delta\geq k$ 的树至少有 k 个叶。

4．有 ω 个连通片的图，当且仅当 $\varepsilon=\nu-\omega$ 时是林。

5．G 的中心是指 $\max\limits_{v\in V(G)} d(u,v)=\min$ 的顶 u，证明树有一个中心或有两个相邻的中心。

6．G 是有 $2k$ 个奇次顶的林，则 G 中存在 k 条无公共边的轨 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，使得 $E(G)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}E(P_i)$。

7．正整数序列 $d_1,d_2,\cdots,d_\nu$ 是树的次数序列的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{\nu} d_i=2(\nu-1).$$

8．T 是 $k+1$ 个顶的树，G 是单图，$\delta(G)\geq k$，则 G 中含有与 T 同构的子图。

9．烷烃的分子式为 C_mH_n，碳原子四价，氢原子一价，且价键不成回路，则对每个自然数 m，仅当 $n=2m+2$ 时，C_mH_n 才可能存在。

*10．求 $\tau(K_{3,3})$。

11．轮是圈加一个新顶（轮心），再把每顶与新顶连上一条

边（辐条）所得的图，试求 n 条辐条的轮的生成树的数目。

12. $e\in E(K_\nu)$，则 $\tau(K_\nu-e)=(\nu-2)\nu^{\nu-3}$。

13. 画出带权 0.1，0.2，0.3，0.4 的 Huffman 树。

14. 画出带权 0.2，0.18，0.12，0.1，0.1，0.08，0.06，0.06，0.06，0.04 的 Huffman 树。

15. 构作与括号列

$$(\,(\quad)(\,(\quad)(\quad)))(((\quad)(\quad)(\quad)))$$

相应的有序林、有序二元树和通过"先入后出"存储器的排列。

16. b_n 表示有序二元树的数目，令 $b_0=1$，且定义

$$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots.$$

(a) 证明：$b_n=b_0b_{n-1}+\cdots+b_{n-1}b_0$；

(b) 证明：$xB^2(x)-B(x)+1=0$；

(c) 用公式 $(1+a)^{1/2}=1+\dfrac{\frac{1}{2}}{1!}a+\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}a^2+\cdots$

证明

$$b_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}=c(n).$$

17. Kruskal 算法能否用来：

(a) 在加权连通图中求最大权的树？

(b) 在不连通图中求最小权生成林？

如果能，怎么求？写出算法来，并指出其时间复杂度。

18. 求图 2.11 的最优树：

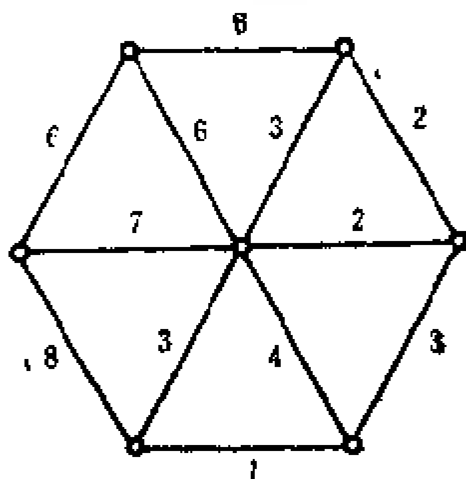


图 2.11

19. $v>2$ 的连通图中至少有两个顶，把它们删除后，所得的图仍连通。

20. 连通图中或有一个一次顶或有一条边，把它删除后所得的图仍连通。

21. 连通图有 n 个顶，至少有 $n-1$ 条边。

22. $\tau(K_5)=?$ 其中不同构的生成树有几个？

23. 若 G 的边数不少于顶数，则 G 中有圈。

24. 乒乓球单打比赛采用淘汰制，有 n 名选手参加比赛，要决出冠军，共需几场比赛？

25. 在坐标纸上有 11 条水平线和 11 条竖直线，以它们的交点为顶点构成一个图，这些直线上的线段为边，问去掉多少条边，才能使每顶次数小于 4？至多可以去掉几条边，还能使图连通？

26. 对于无向树 T，可以有几种定向方式使其成为外向树？

27. H 是把图 G 的每条边用长 k 的轨代替后得到的图，则

$$\tau(H)=k^{\varepsilon-\nu+1}\tau(G).$$

28. 有若干个点，各对点间的距离互不相等，从每个点到离本身最近的点画上直线段，求证不会出现封闭多边形。

29. 每个树皆二分图，什么树是完全二分图？试加以证明。

30. T 是 $n(n\geqslant3)$ 顶树，$d(T)=2$ 当且仅当 $T\cong K_{1,n-1}$.

31. 证明或反驳：

（1）$d(G)=2$，则 G 有生成星。

（2）G 有生成星，则 $d(G)=2$。

32. 连通图 G 中有一个圈 C，C 长为 s，且 C 上的边权皆取最小值，则 G 中至少有 s 个不同的最优树。

3 连 通 性

3.1 连通性和 Whitney 定理

图3.1中G_1, G_2, G_3, G_4都是连通图，但是连通的程度很不一样。G_1是树，删除任意一条边就不连通了；G_2删除一边后仍连通，但它有一个顶v_0，$G_2 - v_0$不连通；G_3只删除一条边或一个顶后仍连通；而$G_4 = K_5$，删除三个顶或三条边都不能使其破碎。为精确刻画连通的程度，我们引入两个量：边连通度和顶连通度。

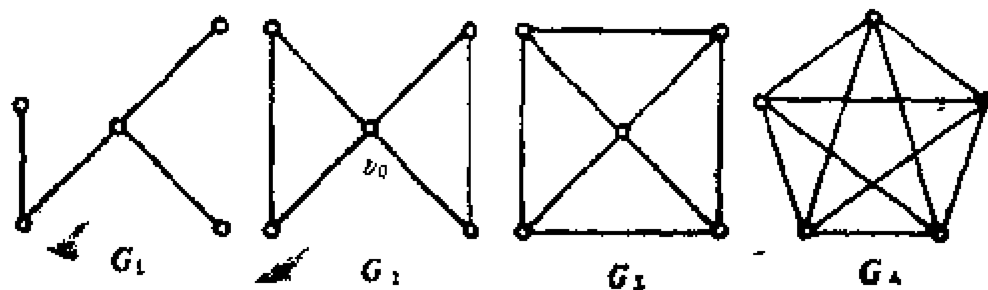


图 3.1

定义 1 $V' \subset V(G)$，$G[V(G) - V']$ **不连通，而**G**是连通图，则称**V'**是**G**的顶割分集．最小顶割分集中顶的个数，记成**$\kappa(G)$**，叫做**G**的连通度；规定**$\kappa(K_v) = v - 1$；κ**（不连通图）**$= \kappa$**（平凡图）**$= 0$**．由一个顶组成的顶割分集叫做割顶．没有割顶的图叫做块，**G**中成块的极大子图叫做**G**的块．**

例如图3.1中$\kappa(G_1) = 1$，$\kappa(G_2) = 1$，$\kappa(G_3) = 3$，$\kappa(G_4) = 5 - 1 = 4$；G_3与G_4是块；G_2中有两个三角形块；G_1中有四个块，它们都是K_2形的；

定义 2 $E' \subseteq E(G)$，G**为连通图，而**$G - E'$**（从**G**中删除**E'**中的边）不连通，则称**E'**为**G**的边割分集，若**G**中已无边**

割分集E''，使得$|E''|<|E'|$，则称$|E'|$为G的边连通度,记成$\kappa'(G)$。$|E'|=1$时，E'中的边叫做桥。规定κ'（不连通图）$=0$，$\kappa'(K_v)=v-1$。

图3.1中，$\kappa'(G_1)=1$，$\kappa'(G_2)=2$，$\kappa'(G_3)=3$，$\kappa'(G_4)=5-1=4$。G_2,G_3,G_4中无桥，而G_1每一边都是桥。

定义 3 $\kappa(G)\geqslant k$时，G叫做k连通图；$\kappa'(G)\geqslant k$时，G称为k边连通图。

图3.1中，G_1是1连通图，也是1边连通图；G_2是1连通图，2边连通图，当然也是1边连通图；G_3是3连通图，当然也是1、2连通图，G_3是3边连通图，当然也是1、2边连通图；G_4是4连通图，当然也是1、2、3连通图，G_4是4边连通图，当然也是1、2、3边连通图。

k连通图，当$k>1$时，也是$k-1$连通图。

k边连通图，当$k>1$时，也是$k-1$边连通图.

定理 1 $\kappa(G)\leqslant\kappa'(G)\leqslant\delta$。

证 设$d(v)=\delta$，则删除与v关联的δ条边后，G变成不连通图，所以这δ条边形成一个边割分集，故最小边割分集边数不超过δ，即$\kappa'(G)\leqslant\delta$。下证$\kappa\leqslant\kappa'$。分情形讨论之。

若G中有桥$e=uv$,则$\kappa'=1$,这时u或v是割顶或$G=K_2$，$\kappa=1$。

若G中无桥，则有$\kappa'\geqslant2$条边，移去它们之后，G变成不连通图。于是删除这κ'条中的$\kappa'-1$条后，G变成有桥的图．设此桥为$e=uv$，我们对于上述$\kappa'-1$条删去的每条边上，选取一个端点，删除这些（不超过$\kappa'-1$个）端点,若G变得不连通,则$\kappa\leqslant\kappa'-1$;若仍连通，则再删去u或v，即可使G变得不连通，于是$\kappa\leqslant\kappa'$。证毕。

定理 2（Whitney，1932） $v\geqslant3$的图是2连通图的充要条件是任二顶共圈（在一个圈上）.

证 若任二顶共圈，任删除一个顶w后，得图$G-w$。任取

两顶 $u,v\in V(G-w)$，u,v 在 G 中共存于某圈 C 上，若 w 不在 C 上，则 $G-w$ 中仍有圈 C，即 u 与 v 在 $G-w$ 中仍连通；若 w 在 G 中时在 C 上，在 $G-w$ 中 u 与 v 在轨 $C-w$ 上，故 u 与 v 仍连通。由 u 与 v 之任意性，$G-w$ 是连通图。故 $\kappa(G)\geqslant 2$，即 G 是连通图。

反之，若 G 是 2 连通图，$\nu\geqslant 3$，任取 $u,v\in V(G)$，用对 $d(u,v)$ 的归纳法证明 u 与 v 之间有两条无公共内顶的轨（图 3.2）。

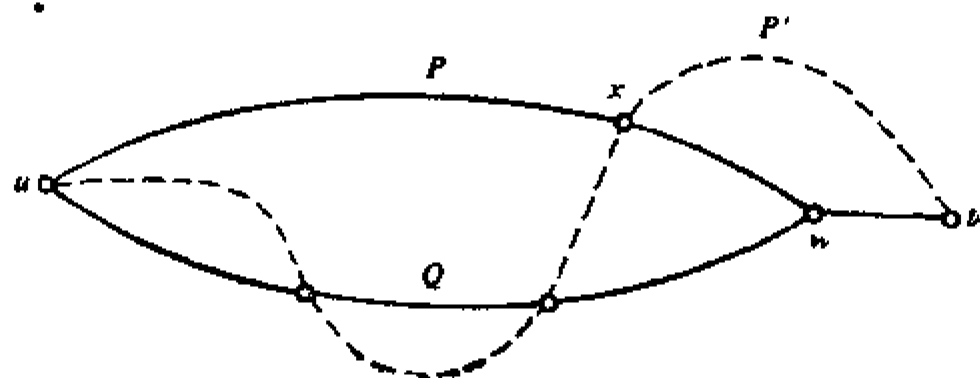


图 3.2

当 $d(u,v)=1$ 时，因 $\kappa\leqslant\kappa'\leqslant\delta$，故 $\kappa'\geqslant 2$，uv 边不是桥，$G-uv$ 仍连通，于是 $G-uv$ 中存在从 u 到 v 的轨 $P_1(u,v)$，这样从 u 到 v 有两条无公共内顶的轨 $P_1(u,v)$ 与边 uv。

假设 $d(u,v)<k$ 时 $(k\geqslant 2)$，结论已成立，考虑 $d(u,v)=k$ 的情形。令 $P_0(u,v)$ 之长为 k，w 是 $P_0(u,v)$ 上与 v 相邻的顶，则 $d(u,w)=k-1$，由归纳法假设，在 u,w 之间有两条无公共内顶的轨 P 与 Q，因 G 是 2 连通图，故 $G-w$ 仍连通。在 $G-w$ 中存在轨 $P'(u,v)\neq P_0(u,v)$，令 x 是 $P\cup Q$ 上 P' 的最后一个顶。因 $u\in P\cup Q$，故 x 存在（可能 $x=u$）。不妨设 $x\in V(P)$，则 G 有两个 u,v 之间无公共内顶的轨：一个是 P 上从 u 到 x 段并在 P' 上从 x 到 v 段；一个是 $Q+wv$。证毕。

3.2 割顶、桥、块

割顶、桥和块是一个图中的关键部位，对其特征要有较为全面的认识。

定理 3 **v 是连通图的一个顶点，则下述命题等价：**

(1) v 是割顶。

(2) 存在与 v 不同的两个顶 u,w，使得 v 在每一条由 u 到 w 的轨上。

(3) 存在 $V-\{v\}$ 的一个划分 $V-\{v\}=U\cup W$，$U\cap W=\varnothing$，使得 $\forall u\in U$，$\forall w\in W$，v 在每一条由 u 到 w 的轨上。

证 (1) ⇒ (3) 因 v 是割顶，$G-v$ 不连通，至少两个连通片，设 U 是一个连通片的顶集，令 $W=V(G)-(U\cup\{v\})$。于是任意二顶 $u,w(u\in U,w\in W)$ 分别属于 $G-v$ 的不同的连通片。这时 G 中从 u 到 w 的一切轨含 v，不然，若 G 中的轨 $P(u,w)$ 不含 v，在 $G-v$ 中仍有 $P(u,w)$，与 u,w 分属于不同的连通片矛盾。

(3) ⇒ (2) 不足道，(2) 只是 (3) 的特殊情形。

(2) ⇒ (1) 若 v 在 u 到 w 的每一条轨上，则 $G-v$ 中已不存在从 u 到 w 的轨，$G-v$ 不连通，故 v 为 G 的割顶。**证毕。**

定理 4 **x 是 G 的一边，G 是连通图，则下述各命题等价：**

(1) x 是 G 的桥。

(2) x 不在 G 的任一圈上。

(3) 存在顶 $u,v\in V(G)$，使得 x 在每一个从 u 到 v 的轨上。

(4) 存在 $V(G)$ 的划分 U 与 W，使得任二顶 $u,w,u\in U$，$w\in W$ 时，x 在每条从 u 到 w 的轨上。

证 (1) ⇒ (2) 设 x 是桥，若 x 在 G 的一个圈 C 上，则 $G-x$ 仍连通，这是不可能的。

(2) ⇒ (1) x 不在任何圈上，若 x 不是桥，则 $G-x$ 仍连通。$G-x$ 中 x 的两个端点间有轨 P，于是在 G 中 P 与 x 并成一

个圈，与 x 不在圈上矛盾，故 x 是桥。

(1) ⇒ (4)　x 是桥，则 $G-x$ 不连通，设 U 是 $G-x$ 的一个连通片的顶集，W 是 $G-x$ 中其它顶所成之集合，于是任二顶 $u,w(u\in U,w\in W)$ 分属于 $G-x$ 的两个连通片。在 G 中，从 u 到 w 的一切轨上皆含 x，不然，若 G 中之轨 $P(u,w)$ 不含 x，在 $G-x$ 中仍有 $P(u,w)$，与 u,w 分属 $G-x$ 的两个连通片相违。

(4) ⇒ (3) 不足道。

(3) ⇒ (1)　因为 x 在每条从 u 到 v 的轨上，故 $G-x$ 中，u 与 v 之间不存在轨，即 x 是桥。**证毕。**

定理 5　G 连通，$\nu\geqslant 3$，**则下列命题等价：**

(1) G **是块。**

(2) G **的任二顶共圈。**

(3) G **的任一顶与任一边共圈。**

(4) G **的任二边共圈。**

(5) **任给** G **的二顶及一边，存在连接此二顶含此边之轨。**

(6) **对** G **的三个不同的顶，存在一轨，连接其中两个顶，含第三个顶。**

(7) **对** G **的三个不同的顶，存在一轨，连接其中两个顶，不含第三个顶。**

证 (1) ⇔ (2)　见定理 2。

(2) ⇒ (3)　只需考虑 u 为 G 的任给的一个顶，vw 是 G 中任给定的一条边，且 $u\neq v,u\neq w$ 的情形。设 C 是含 u 与 v 的圈，若 w 在 C 上，则 C 上含 u 的轨 $P(v,w)$ 与边 vw 形成一个圈，它含 u 及边 vw。若 w 不在 C 上，因 v 不是割顶，由定理 3，存在不含 v 的轨 $P(w,u)$。令 u' 是 $P(w,u)$ 与 C 从 w 沿 $P(w,u)$ 看来的第一个公共顶，则由边 vw，$P(w,u)$ 上 w 到 u' 段，以及 C 上含 u 的轨 $P'(u',v)$ 并成一个圈，此圈满足 (3) 的要求。

(3) ⇒ (4)　与 (2) ⇒ (3) 类似地证明。

(4) ⇒ (5) 已知任二边共圈，设 u,v 是 G 上任给定的两个顶，x 是任给定的一条边，只考虑 x 与 u,v 皆不相关联的情形。由任二边共圈显然有任二顶共圈，于是由于 (2) ⇒ (3) 知 u 与 x 共圈，设此圈是 C_1；同理 v 与 x 共圈，设此圈是 C_2，若 $v \in C_1$ 或 $u \in C_2$，则 (5) 成立；若 $u \notin C_2$，且 $v \notin C_1$，则如下构作含 x 之轨 $P(u,v)$：从 u 出发沿 C_1 到达 C_1 与 C_2 上第一个公共顶 w，再从 w 出发沿 C_2 含 x 的部分到达 v。

(5) ⇒ (6) 设 u,v,w 是 G 的三个顶，且与 w 相关联的一条边为 x，由 (5)，存在轨 $P(u,v)$，x 在 $P(u,v)$ 上，于是 w 在 $P(u,v)$ 上。

(6) ⇒ (7) $u,v,w \in V(G)$，由 (6)，存在轨 $P(u,w)$，$P(u,w)$ 含顶 v，则 $P(u,w)$ 的从 u 到 v 的一段不含 w。

(7) ⇒ (1) 由 (7)，对任给定的二顶 u 与 v，不存在这样的顶，它在从 u 到 v 的每一轨上，由定理 3，G 无割顶，故 G 是块。**证毕。**

3.3 可靠通讯网的构作

我们要构作一个有线通讯网，使得敌人炸坏我几个通讯站后，其余的通讯站仍然可以彼此通话。显然，有两个要求是必要的：一是不怕被敌人炸坏的站的数目要多，一是整个造价要小。这个实际问题的数学模型如下：

G 是加权连通图，k 是给定的自然数，求 G 的有最小权的 k 连通生成子图。当 $k=1$ 时，它就是用 Kruskal 算法求得的生成树；当 $k>1$ 时，是尚未解决的难解问题之一。

当 $G=K_\nu$，每边权皆为1时，Harary 于 1962 年解决了这一问题。下面介绍 Harary 的工作。

令 $f(m,n)$ 表示 n 个顶的 m 连通图当中边数的最小值，$m<n$。

由 $\sum_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$，$\kappa\leqslant\kappa'\leqslant\delta$，

$$f(m,n)\geqslant\left\{\frac{mn}{2}\right\}.$$

Harary 实际构作出一个 n 个顶的 m 连通图，它的边数恰为 $\left\{\frac{mn}{2}\right\}$ 条，且 $f(m,n)=\left\{\frac{mn}{2}\right\}$。此图记成 $H_{m,n}$。

(1) m 是偶数，$m=2r$。$H_{2r,n}$ 以 $\{0,1,2,\cdots n-1\}$ 为顶集合。当 $i-r\leqslant j\leqslant i+r$ 时，在顶点 i 与 j 之间连一边，这里加法在 mod n 意义下进行。

(2) m 是奇数，$m=2r+1$，n 是偶数。先构作一个 $H_{2r,n}$，然后对 $1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}$ 的 i，在 i 与 $i+\frac{n}{2}$ 间加上一条边得 $H_{2r+1,n}$。

(3) m 是奇数，$m=2r+1$，n 是奇数。先构作 $H_{2r,n}$，然后在顶点 0 与 $\frac{n-1}{2}$，0 与 $\frac{n+1}{2}$ 之间加上边，在顶 i 与 $i+\frac{n+1}{2}$ 间加上边，其中 $1\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}$，则得到 $H_{2r+1,n}$。见图 3.3。(a) 是 $H_{4,8}$，(b) 是 $H_{5,8}$，(c) 是 $H_{5,9}$。

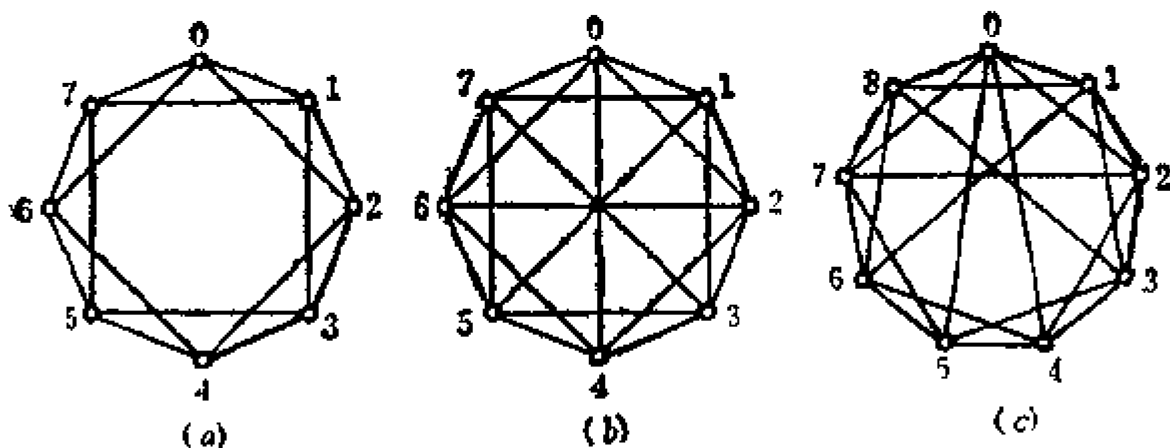


图 3.3

定理 6 $H_{m,n}$ **是** m **连通图，且边数最少。**

证 $m=2r$ 时，我们来证明$H_{2r,n}$，设有少于 $2r$个顶组成的顶剖分集。若 V' 是一个顶剖分集，且$|V'|<2r$，又设 i 与 j 两个顶分别属于$H_{2r,n}-V'$ 的不同连通片，令

$$S=\{i,i+1,\cdots,j-1,j\},$$
$$T=\{j,j+1,\cdots,i-1,i\},$$

其中加法在 mod n 下执行 因为$|V'|<2r$，不失一般性，设$|V'\cap S|<r$，则显然存在 $S-V'$ 中的序列，从 i 始至 j 终，使得序列中连续二顶号码之差的绝对值最大是r。但这样的序列中相邻顶之间由(1)知存在边，即在$H_{2r,n}-V'$中有轨$P(i,j)$，与 i,j 分居于$H_{2r,n}-V'$ 的两个连通片中相矛盾，故 $H_{2r,n}$是 $2r$ 连通的。

相似地可以证明$m=2r+1$时，$H_{2r+1,n}$是$2r+1$连通的。由于

$$f(m,n)\geqslant\left\{\frac{mn}{2}\right\},\ \varepsilon(H_{m,n})=\left\{\frac{mn}{2}\right\},$$

而$H_{m,n}$是 n 顶m连通图，故有

$$f(m,n)\leqslant\left\{\frac{mn}{2}\right\},$$

从而得

$$\varepsilon(H_{m,n})=f(m,n)=\left\{\frac{mn}{2}\right\}.$$

证毕。

由于$\kappa\leqslant\kappa'$，故$H_{m,n}$也是m边连通图。若用$g(m,n)$表示n个顶m边连通图中的最少边数，则对于$1<m<n$，$g(m,n)=\left\{\frac{mn}{2}\right\}$。

图的连通性是实际问题与理论问题当中都十分关心的重要概念之一。后面我们还要讲有向图的连通性并给出求κ与κ'的有

效算法和连通性的Menger型定理。本章要求我们掌握κ与κ'的定义，k连通与k边连通图的定义，以及割顶、桥、块的特征。关于割顶、桥、块的有效算法，我们后面有机会学习。

习　　题

1．G是k边连通图，E'是G的k条边的集合，则$\omega(G-E')\leqslant 2$。

2．给出一个k连通图G及G的k个顶的集合V'，使得$\omega(G-V')>2$。

3．G是单图，$\delta\geqslant\nu-2$，则$\kappa(G)=\delta$。

4．找一个单图G，满足$\delta=\nu-3$，$\kappa(G)<\delta$。

5．G是单图，$\delta\geqslant\frac{\nu}{2}$，则$\kappa'(G)=\delta$。

6．G是单图，$\delta\geqslant\frac{1}{2}(\nu+k-2)$，则$G$是$k$连通的。

7．κ（妖怪）$=\kappa'$（妖怪）。

8．若$1\leqslant m\leqslant n$，则存在单图，满足$\kappa-1$，$\kappa'=m$，$\delta=n$。

9．G为2边连通图的充要条件是任二顶之间至少有两条无公共边的轨相连通。

10．P是2连通图中u与v两顶之间的轨，是否一定有另一条与P无公共内顶的轨$P_1(u,v)$？

11．若G不含偶圈和孤立顶，则G的块或是K_2或是奇圈。

12．一个不是块的连通图中至少存在两个块，它们仅含G的一个割顶。

13．$b(v)$表示G中含顶v的块的数目，则G的块数为$\omega+\sum_{v\in V(G)}(b(v)-1)$。

14．G是2连通图，X与Y是V中不相交子集，且每个之中至少含两个顶，则G中含两条无公共内顶的轨P与Q，使得：

(1)P与Q之起点皆属于X；(2)P与Q之终点皆属于Y；(3)P与Q的内点皆不属于$X \cup Y$。

15．$\forall e \in E(G)$，则$\kappa(G-e)<\kappa(G)$，则称G是κ临界图。

(a) 每个κ临界2连通图有一个二次顶。

(b) G是κ临界2连通图，$\nu \geq 4$，则$\varepsilon \leq 2\nu-4$。

16．$H_{2r+1,n}$是$2r+1$连通图。

17．$\kappa(H_{m,n})=\kappa'(H_{m,n})=m$。

18．树T上v是割顶，则$d(v)>1$。

19．只有两个顶不是割顶的连通图是轨。

20．G两每顶皆偶次，则G中无桥。

21．G是k次正则2分图，$k \geq 2$，则G无桥。

22．G是连通图，$\nu \geq 3$。

(a) 若G有桥，则$\exists v \in V(G)$，使得$\omega(G-v)>\omega(G)$。

(b) (a)之逆未必正确。

23．画出$H_{3,8}$，$H_{3,9}$。

24．G'是G的真子图，G连通，则$\exists e \in E(G)$，$e \notin E(G')$，但e的一端在G'上。

25．三次正则图有一个割顶，当且仅当它有一条桥。

26．证明：有桥三次正则图至少10个顶。

4 可 行 遍 性

4.1 Euler 图

本节把七桥问题引出的图论问题系统地讲一讲。

定义 1 图中含每一条边的行迹叫做Euler行迹；闭的 Euler 行迹叫做 Euler回路，含 Euler 回路的图叫做 Euler 图。

直观地讲，欧拉图就是从一顶出发每条边恰通过一次又能回到出发顶点的那种图，即不重复地行遍所有的边再回到出发点。下面给出 Euler 图的特征性描述。

定理 1 G 是连通图时，下面三个命题等价：

(1) G 是 Euler 图。

(2) G 的每顶皆偶次。

(3) $G=\bigcup_{i=1}^{d} C_i$，C_i 是圈，且 $E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing\,(i\neq j)$。

证 （1）→（2） 已知G是 Euler图，设W是G中的Euler回路，$\forall v\in V(G)$，则 v 必在W 上出现．设 v 出现了 k 次，则显然$d(v)=2k$，即 v 是偶次的．由 v 之任意性，（2）成立。

（2）⇒（3）已知G是每顶皆偶次的连通图，而非平凡树至少两个叶，故G不是树，G内可以找到一个圈 C_1，把 C_1上的边从G 上删除，得新图G_1，若G_1每顶皆零次，则$G=C_1$，（3）成立，不然，G_1 中必有一个连通片每顶皆偶次，于是G_1中有圈 C_2，把 C_2 的边从G_1 中删除，得一新图 G_2，依此类推，进行有限次之后，得到无边图 G_d。于是，$G=\bigcup_{i=1}^{d} C_i$，C_i是G中

之圈，且$E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant d$。

(3)⇒(1) $d=1$时，G显然是Euler图；$d\geqslant 2$时，由于G连通，可以找到两个圈，不妨设其为C_1，C_2，C_1，C_2有公共顶v_0，令$C_{12}=C_1\cup C_2$，则C_{12}是闭行迹。又由于G连通，还可找到一个圈，不妨设为C_3。使C_3与C_{12}有公共顶，于是$C_{123}=\bigcup_{i=1}^{3}C_i$也是闭行迹。如此下去，得证$G=\bigcup_{i=1}^{d}C_i$是闭行迹，故$G$是Euler图。**证毕。**

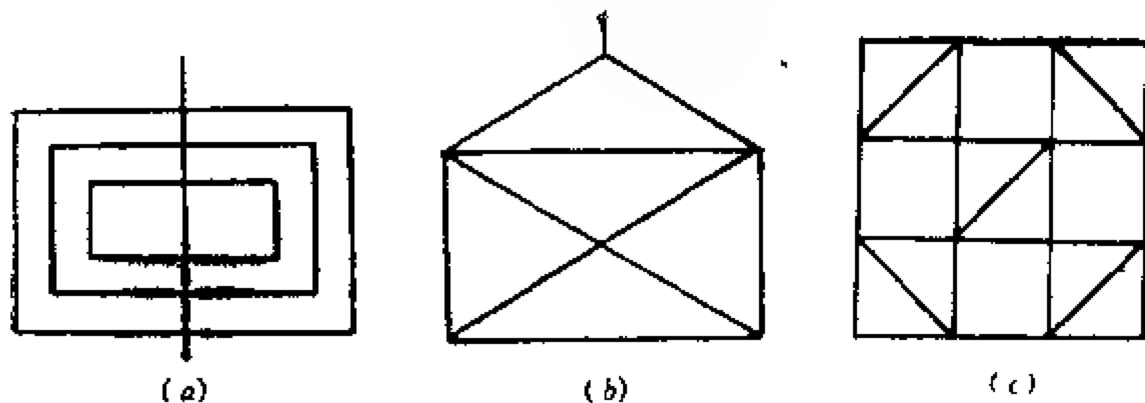
定理 2 连通图G中有Euler行迹的充要条件是G中至多有两个奇次顶。

证 设连通图G有Euler行迹，若是闭行迹，则G是Euler图，由定理1，G中无奇次顶。若不是闭行迹，设u_0与v_0是此行迹的起止顶，考虑$G+u_0v_0$，它有闭行迹，是Euler图，每顶皆偶次，故G中只有u_0，v_0两个奇次顶。

反之，若G中无奇次顶，由定理1，它是Euler图，有闭的Euler行迹。若有奇次顶，至多不超过两个奇次顶，由于奇次顶个数是偶数，所以恰有两个奇次顶，设它们是u_0，v_0。由于$G+u_0v_0$是每顶皆偶的连通图，由定理1，$G+u_0v_0$是Euler图，有Euler回路C，于是$C-u_0v_0$即G中的Euler行迹。**证毕。**

定理 2 为判别图形能否一笔画给出了依据。

例 1 下图中，哪个可以“一笔画”？



(a)　(b)　(c)

图 4.1

解 (a)与(c)可以，(b)不可。因为(a)中只两个奇次顶，竖线的两个端点；(c)中只两个奇次顶，中间小正方形上的两个五次顶；(b)中上方三角形一个顶点和下方矩形的下底边的两个顶点为三个奇次顶，另外最上方还有一个一次顶。

例 2 七桥问题。

解 见图1.1(b)，图中有奇次顶，所以不是Euler图，不会有Euler回路，即不会每桥（边）恰行过一次而回到出发点；更有甚者，因它的四个顶皆奇次，由定理2，它亦无Euler行迹，既使不要求回到出发点，每桥恰过一次亦不可能。

例 3 在圆上任取$n>2$个点，把每个点用线段与其余各点连接，能否一笔画出所有这些线段，使第一条线段的终点与第二条线段的起点相重，第二条线段的终点与第三条线段的起点相重，…，最后一条线段的终点与最初那条线段的起点相重合？

解 以这n个点为顶点，以所连线段为边，构成一个连通图；当n为奇数时，G的每顶皆偶次，由定理1，本题答案是肯定的；当n为偶数时，G的每顶皆奇次，由定理1，本题的答案是否定的。

4.2 中国邮路问题

一位邮递员从邮局选好邮件去投递，然后回到邮局。当然他必须经过他所管辖的每条街至少一次。请为他选择一条路线，使其所行路程尽可能地少。

这就是**中国邮路问题**的原始模型，是我国的管梅谷教授首先提出并进行研究的。

中国邮路问题在于在连通加权图上求取含有一切边的权最小的回路，我们称这种回路为**理想回路**。显然，在Euler图中，每个Euler回路都是理想回路。

下面介绍求Euler图中Euler回路的Fleury算法。

Fleury **算法**：

（1）$\forall v_0 \in V(G)$，令 $W_0 = v_0$。

（2）设行迹 $W_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$ 已选定，则从 $E - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取一条边 e_{i+1}，使得

(i) e_{i+1} 与 e_i 相邻，

(ii) 除非已无选择余地，e_{i+1} 不要选 $G_i = G - \{e_1, \cdots, e_i\}$ 的桥。

（3）直到（2）不能进行为止。

例 4 求图 4.2 中的 Euler 回路。

解 取 $W_0 = v_0$，$W_1 = v_0 e_1 v_1$，这时与 e_1 相邻的未取用的边只有 e_2，尽管 e_2 是 $G - e_1$ 中的桥，但已无其它选择的余地，故只有取

$$W_2 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2.$$

至此，W_3 不可选为 $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_6 v_0$，因为 e_6 是 $G - \{e_1, e_2\}$ 的桥，而这时并非无其它选择的余地，例如可以不选 e_6 而选 e_3 或 e_5，所以可以取

$$W_3 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3.$$

继续执行 Fleury 算法，得

$$W_4 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4,$$

$$W_5 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 e_5 v_2,$$

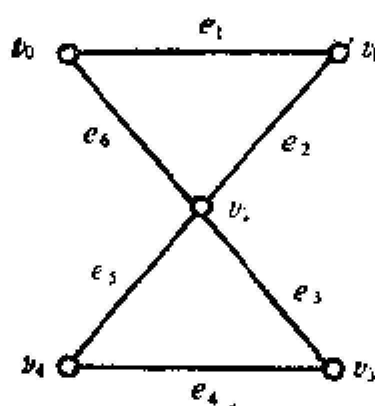


图 4.2

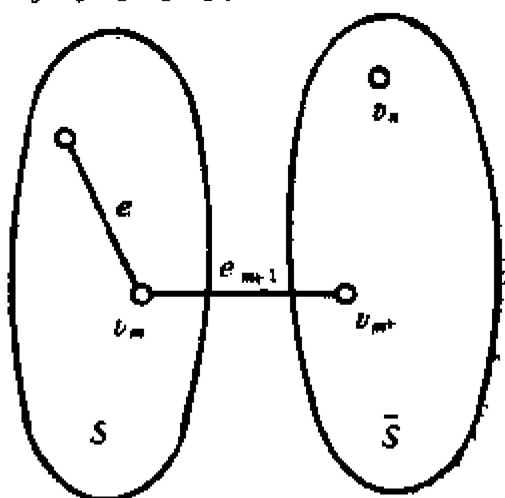


图 4.3

$$W_6 = v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_2e_6v_0,$$

W_6即为 Euler 回路。

定理 3　若G是 Euler 图，Fleury 算法终止时得到的是 Euler 回路。

证　G是 Euler 图，$W_n = v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$是Fleury算法终止时得到的行迹，则$v_n$在$G_n$中的次数是0．故$v_0 = v_n$，$W_n$是闭行迹。

若W_n不是 Euler 回路，令S是G_n中有正次数的顶集，则$S \neq \varnothing$。但$v_n \notin S$，令$\bar{S} = V - S$，则$v_n \in \bar{S}$。令m是$v_m \in S$而$v_{m+1} \in \bar{S}$的v的脚标的最大值，因W_n终止于$\bar{S}$，e_{m+1}是G_m的桥（图4.3）．令e是G_m中与v_m关联的一边，且$e \neq e_{m+1}$，由算法第二步，e必为G_m的桥，因此e也是$G_m[S]$的桥．又$G_m[S] = G_n[S]$，故$G_m[S]$中每顶皆偶次，$G_m[S]$无桥，与e是$G_m[S]$的桥矛盾．**证毕。**

若G不是 Euler 图，任何理想回路通过某些边多于1次，例如图4.4中$xuywvzwyxuwvxzyx$是理想回路，边ux，xy，yw和wv上通过了两次。

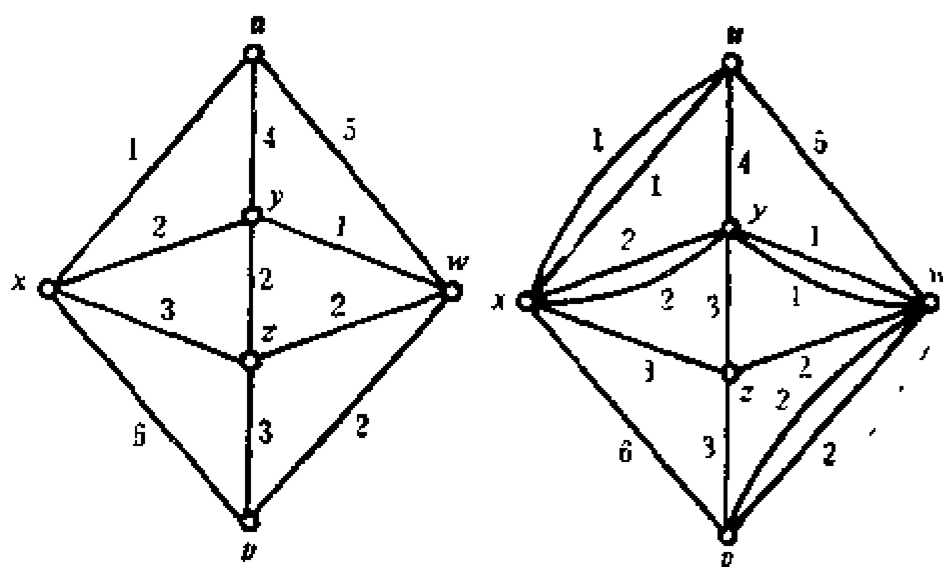


图 4.4

把边e的两端间再连上一条权亦为$w(e)$的新边，则称新边

为原来那条边的倍边．ux, xy, yw, wv 都有倍边．一般中国邮路问题的数学模型是：

(i) 用倍边法由 G 得到 G^* 图，使 G^* 是 Enler 图，且

$$\sum_{e\in(E(G^*)\ E(G))} w(e)=\min,$$

(ii) 在 G^* 中找到 Euler 回路．

上述问题已由 Edmonds 和 Johnson 于 1973 年解决．

4.3 Hamilton图

1859 年，数学家 Hamilton 发明了一种周游世界的游戏，把一个 12 面体的 20 个顶点分别标上北京、东京、华盛顿等20个大都市的名字，要求玩的人从某城出发，沿着 12 面体的棱通过每一城市恰一次，再回到出发的那个城市．这种游戏在欧州曾风靡一时，Hamilton 以 25 个金币的高价把该项专利卖给了一个玩具商（图4.5）．

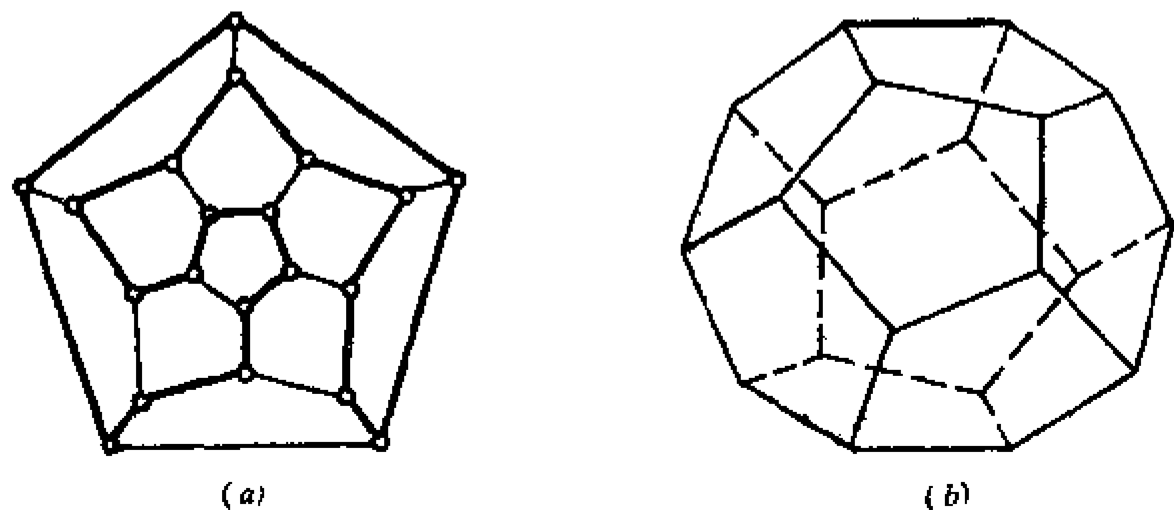


图 4.5

用图论的语言来讲，这个游戏是让人在十二面体图上找出生成圈．

定义 2　含图的一切顶的轨叫 Hamilton **轨，闭的** Hamilton

轨叫做 Hamilton 圈；有 Hamilton 圈的图叫做 Hamilton 图。

例 5 $K_\nu(\nu\geqslant 3)$ 是 Hamilton 图。而 $\nu=\mathrm{Odd}$ 的二分图不是 Hamilton 图，因为二分图中无奇圈。图 4.6 中的图号称 Herschel 图，Herschel 图是 11 个顶的二分图，所以它不是 Hamilton 图。

下面探讨 Hamilton 图的性质。和 Euler 图不一样，Hamilton 图的充要条件（象样的）至今尚未建立起来，只是分别地给了一些充分条件，另外给了一些必要条件，用这些条件来判定任意给定的图是否是 Hamilton 图，只能在个别情形之下才能见效。

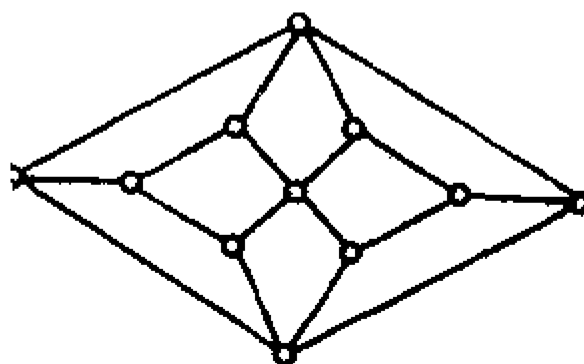


图 4.6

定理 4 G 是 Hamilton 图，$\forall S\subset V$，$S\neq\varnothing$，则 $\omega(G-S)\leqslant|S|$。

证 设 C 是 Hamilton 圈，则 $\forall\, S\subset V, S\neq\varnothing$，有

$$\omega(C-S)\leqslant|S|,$$

又 $C-S$ 是 $G-S$ 的生成子图，故

$$\omega(G-S)\leqslant\omega(C-S)\leqslant|S|.$$

证毕。

例 6 图 4.7 中的图是否 Hamilton 图？

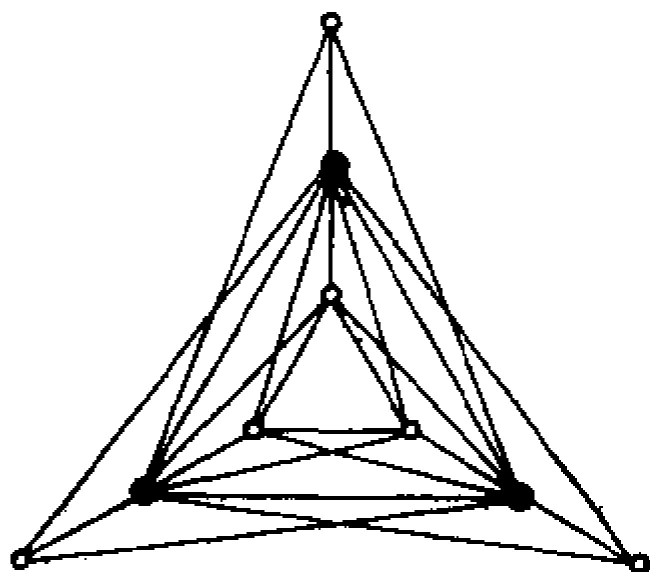


图 4.7

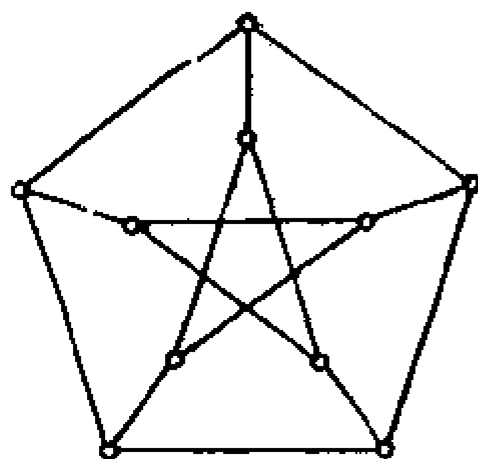


图 4.8

解 不是。三个“黑顶”删除后，得四个连通片，由定理4，它不是Hamilton图。

注意定理4之逆不真，例如图4.8中的Petersen图（是个最小的妖怪图），它不是Hamilton图，但$G-v$（$\forall v\in V(G)$）则是Hamilton图，可见Petersen图满足$\forall S\subset V(G)$，$S\neq\varnothing$，则$\omega(G-S)\leqslant |S|$。

定理5 (Ore，1960) **G是$\nu\geqslant3$的图，且$\forall u,v\in V(G)$，$d(u)+d(v)\geqslant\nu-1$，则G中有Hamilton轨；若$d(u)+d(v)\geqslant\nu$，则G是Hamilton图。**

证 首先证明，当$\forall u,v\in V(G)$，$d(u)+d(v)\geqslant\nu-1$时，G是连通图。事实上，若G不连通，有$\omega\geqslant2$个连通片$G_1,G_2,\cdots,G_\omega$。$\forall u_1\in G_1$，有$d(u_1)\leqslant\nu(G_1)-1$，$\forall u_2\in G_2$，有$d(u_2)\leqslant\nu(G_2)-1$，于是$d(u_1)+d(u_2)\leqslant\nu(G_1)+\nu(G_2)-2\leqslant\nu-2$，与$d(u_1)+d(u_2)\geqslant\nu-1$矛盾。

若$\forall u,v\in V(G)$，$d(u)+d(v)\geqslant\nu-1$，而G中无Hamilton轨，令$P(v_1,v_{l+1})$是G的最长轨，其长为$l<\nu-1$，则v_1与v_{l+1}的相关联的边的另一个端点必为$P(v_1,v_{l+1})$上的内顶。设P上的顶依次为$v_1,v_2,v_3,\cdots,v_{l+1}$，其中$v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}$与$v_1$相邻，而$v_{i_1-1},v_{i_2-1},\cdots,v_{i_k-1}$都不与$v_{l+1}$相邻，则$d(v_1)=k$，$d(v_{l+1})\leqslant l-k$，这样，$d(v_1)+d(v_{l+1})\leqslant l<\nu-1$，与定理条件不符，故$G$中出现图4.9的结构，即有一个长$l+1$的圈$C$。又

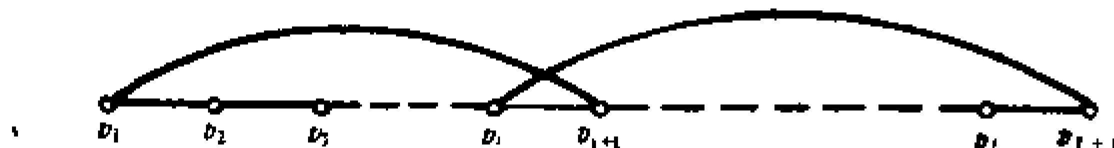


图 4.9

因$P(v_1,v_{l+1})$上的顶的个数$l+1<\nu$，故存在$w\in V(G)$，w不在$P(v_1,v_{l+1})$上。由G的连通性，存在轨$P_1(w,v_1)$，设v_{k_0}是从w起$P_1(w,v_1)$上第一个在C上的顶，这样有一条轨起点在

w，终点在C上的比$P(v_1,v_{l+1})$更长的轨，它是由$P_1(w,v_1)$上从w到v_{k_0}段及C上由v_{k_0}开始的长l的轨并成的。至此得到矛盾。

定理的后半部分显然成立，因为G中有最长轨，长$\nu-1$，于是与上面证明同理，在此长$\nu-1$的轨上出现图4.9式的结构，即有一个长ν的圈，**证毕**。

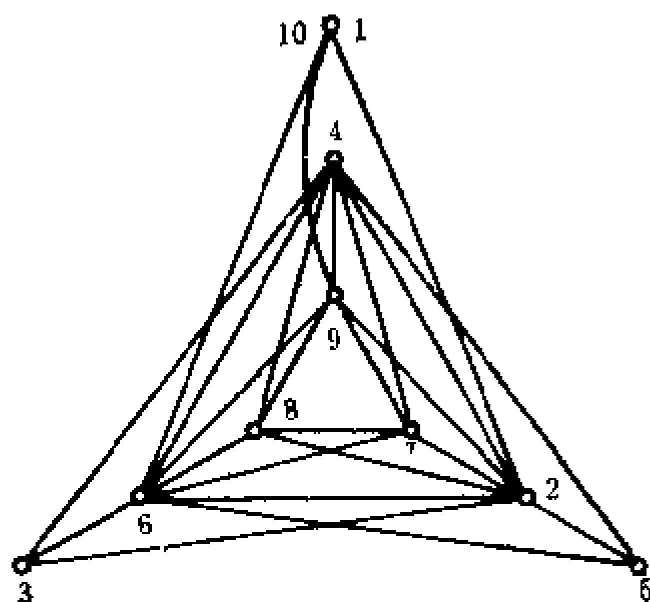


图 4.10

值得注意的是，这个定理之逆不真，例如G是一个5阶圈，$\forall u,v\in G$，$d(u)+d(v)=4<5=\nu$，定理5的条件不满足，但G仍然是Hamilton图。

例 7 图4.10是例6中图4.7稍加改变后得到的，它是Hamilton图，Hamilton圈是1 2 3 4 5 6 7 8 9 1，但$d(3)+d(5)=6<9=\nu$。这种Hamilton图不能用Ore定理来判定。

例 8 若围圆桌至少坐着五个人，那么一定可以调整他们的座位，使得每个人两侧都挨着新邻居。

证 若恰好是五个人，设原来座次是$ABCDEA$，可以调成$ADBECA$。

若超过了五个人，以人为顶，仅当两人原来不邻座时，在此相应的二顶之间连一条边，得一个图G。由于每个顶都是$|V(G)|-3$次的，于是任二顶次数之和为$2\nu-6$，又$\nu>5$，故$2\nu-6\geqslant\nu$，由定理5，G是Hamilton图，按G的Hamilton圈的次序请各位入席即可。**证毕**。

例 9 一个有限集合的全部子集可以这样排序，使任何相邻的集合相差一个元素。

证 设此集合为A，$|A|=n$，我们把A的每个子集用有序的n个0-1数码来表示，不妨设$A=\{1,2,3,\cdots,n\}$，一个子集中含有i时，在第i位上写1，否则在第i值上写0。全部子集共计2^n个，以这2^n个子集相应的n个分量的0-1编码为顶，仅当两个编码仅有一个同位数码相异时，在此二顶之间连一边，得到一个图，此图是n**维立方体**。n维立方体是由两个$n-1$维立方体之间顶标一致的两个顶加上边构成的，于是用数学归纳法极易证明例9。**证毕**

（图4.11和图4.12，实线表示Hamilton圈）。

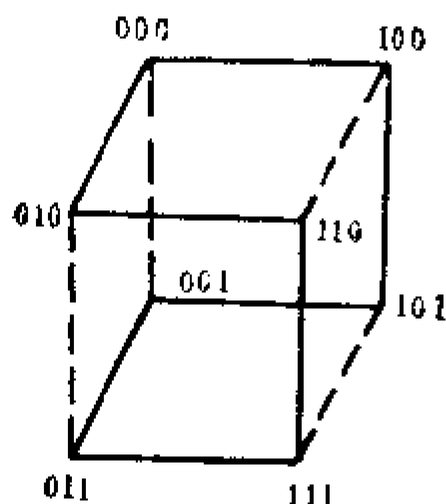


图 4.11

下面研究棋盘上的所谓马图。我们把下面的图叫做**“马图”**：以方格棋盘上的小方格为顶，当且仅当一格能以马的一步跳到另一格时，此二格所代表的顶之间连一边。

例 10 4×4的棋盘上的马图是否Hamilton图？即马从任一方格出发，每个格恰跳到一次，再回到出发的那个方格，是否可能？

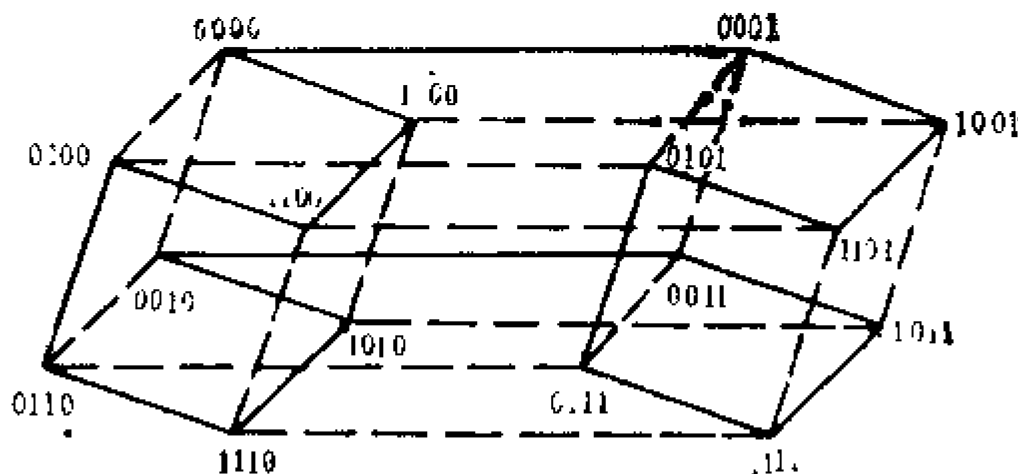


图 4.12

解 见图4.13，4个c号顶形成一个4阶圈；4个d号顶形成

一个4阶圈；4个a号顶是2次顶，每个a顶仅与两个b顶相邻。于是把四个b顶删除后，得六个连通片：一个c号4阶圈，一个d号4阶圈，四个孤立顶a；而原来的马图是连通的：每个b与一个c一个d相邻，而每个a顶与两个b顶相邻。由定理4知，4×4的马图不是Hamilton图，即马从任何方格出发也不能每格恰跳到一次又回到出发的方格。

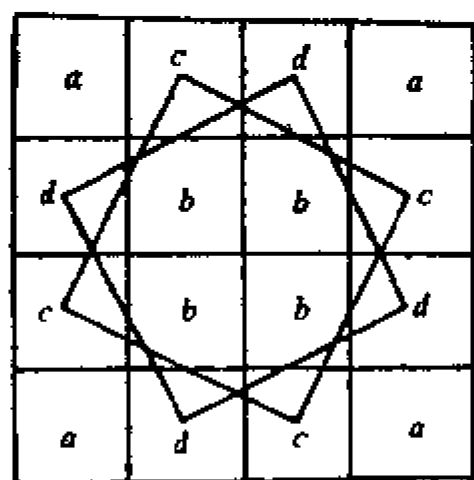


图 4.13

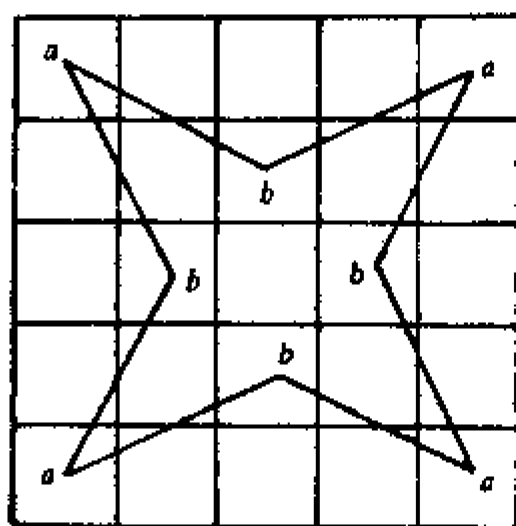


图 4.14

例 11 对5×5的马图，讨论例10中的问题。

解 见图4.14，因为图上的a号顶是2次的，它们已经在一个8阶圈上，所以这4个a顶不会与其余的21个顶形成Hamilton圈；G不是Hamilton图，从而答案是否定的。

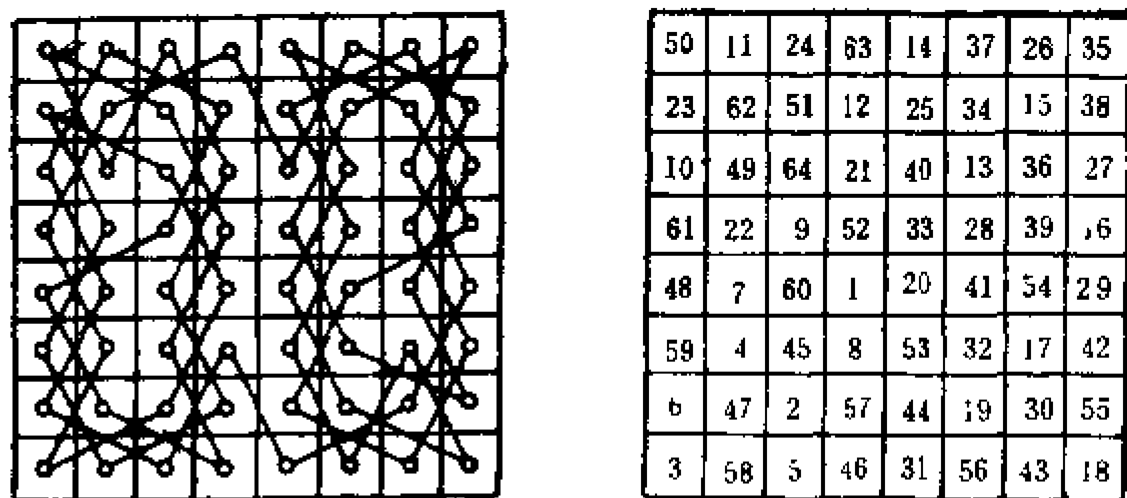
例 12 8×8的棋盘上的马图是Hamilton图，即在国际象棋棋盘上马可以从任何一个方格跳到每个方格恰一次再回到出发的方格。一种解，即一个Hamilton圈如图4.15所示，这是一个幻方，每行与每列之和皆为260。

下面介绍Bondy与Chvatal 1974年建立的闭包判别法。

定理 6 **u与v是G的两个不相邻的顶，且$d(u)+d(v)\geqslant v$，则G为Hamilton图的充要条件是$G+uv$是Hamilton图。**

证 G为Hamilton图，$G+uv$显然也是Hamilton图。反之，若$G+uv$是Hamilton图，而G不是Hamilton图，这时G

中有Hamilton 轨 $v_1v_2v_3\cdots v_\nu$，其中 $v_1=u$，$v_\nu=v$。若对某个



50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图 4.15

i $(2\leqslant i\leqslant \nu-1)$，$v_1v_i\in E(G)$，则$v_{i-1}v_\nu\notin E(G)$，不然 $v_1v_2\cdots v_{i-1}v_\nu v_{\nu-1}\cdots v_iv_1$ 是 G 的Hamilton 圈。因而$d(v_\nu)\leqslant \nu-1-d(v_1)$，$d(v_1)+d(v_\nu)\leqslant \nu-1$，与 $d(u)+d(v)\geqslant \nu$ 矛盾。**证毕。**

这一定理启发人们引入闭包的概念。

定义 3 **把G中次数之和至少为ν的不邻的两顶之间添加一边，直至这种加边过程终止，得到的图叫做G的闭包，记之为$C(G)$。**

定理 7 **G为连通图，则$C(G)$存在且唯一。**

证 $C(G)$的存在性不足道。若图中无$d(u)+d(v)\geqslant \nu$的不邻顶对，则$C(G)=G$；否则，加边过程会在有限步之内终止。

下证$C(G)$的唯一性。设G_1与G_2是G的两个闭包，且$e_1, e_2,\cdots,e_m$与$f_1,f_2,\cdots,f_n$分别是构作G_1与G_2时加的边（若G一条边也不能加时，则$C(G)=G$，这时唯一性成立），我们证明$e_i\in E(G_2)$，$i=1,2,\cdots,m$；$f_j\in E(G_1)$，$j=1,2,\cdots,n$。设e_{k+1}是$e_1,e_2,\cdots,e_m$中不在G_2中的第一条边，令$H=G+\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$。由$G_1$的定义，当$uv=e_{k+1}$时，

$$d_H(u)+d_H(v)\geqslant \nu,$$

又$H\subseteq G_2$，故

$$d_{G_2}(u)+d_{G_1}(v)\geqslant\nu,$$

但 $e_{k+1}=uv$ 不在 G_2 中，应有 $d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)<\nu$，矛盾。可见 $e_1,e_2,\cdots,e_m\in E(G_2)$。同理可证 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in E(G_1)$。**证毕**。

定理 6 指出 G 是 Hamilton图的充要条件是 $C(G)$ 是Hamilton 图。这个事实有时能发挥独到的作用，例如图4.16中的 G 不满足 Ore 定理的条件，不能用 Ore 定理判其为 Hamilton 图，但它确为 Hamilton 图。因为它的闭包是 K_6。由此可见，闭包的引入是

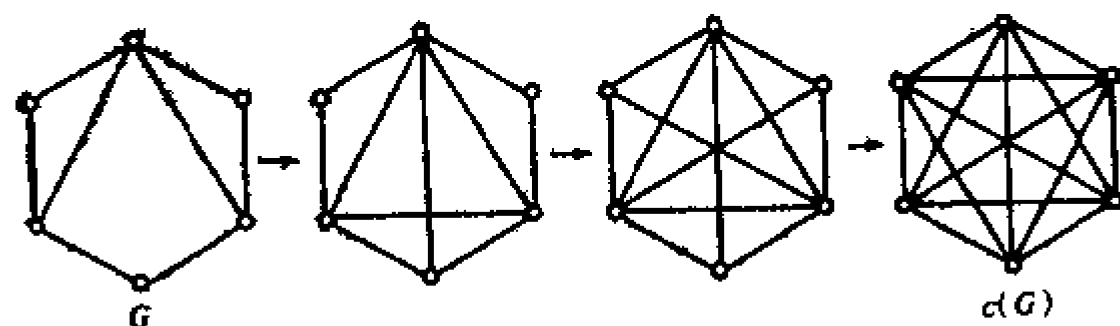


图 4.16

有一定作用的，但它并未给出令人满意的一个充要条件，只是把一个图 G 是否为 Hamilton 图的问题转化为另一个图 $C(G)$ 是否为 Hamilton 图的问题。这种进展步子不太大，尚需追求更为有效的充要条件。

4.4 货郎问题

货郎问题有两种提法。一种是货郎到各村去卖货，再回到出发处，每村都要串到（不限制次数），为其设计一种路线，使得所用旅行售货的时间最短。这个问题的数学模型是在加权图 G 上求一个生成回路 C，使得

$$W(C)=\sum_{e\in C}w(e)=\min\{各个生成回路的权\}.$$

这个 C 叫做**理想回路**。

另一种提法是限制货郎每村到且仅到一次。这时，其数学模

型是在加权图上求一个Hamilton圈C_h，使得

$$W(C_h)=\sum_{e\in C_h}w(e)=\min\{\text{各个Hamilton圈的权}\}.$$

从算法理论上讲，这两种提法的难度是相当的。我们现在考虑与Hamilton图关系更为直接的后一种提法的货郎问题。这个问题的难度很大：

（1）如何判定G是否Hamilton图，这个问题目前尚无有效算法，也不知道究竟存在不存在它的有效算法。在不知G是否为Hamilton图的情况下，硬去找一条如何如何的Hamilton圈自然是盲目的，甚至是徒劳的。

（2）已知G是Hamilton图，求出一个Hamilton圈来至今亦无有效算法，和（1）一样，也不知道究竟存在不存在它的有效算法。

货郎问题的有效算法的有无问题，是当今图论中面临的一大悬案。目前，只能设计各种近似算法。下面介绍一种近似算法——**"改良圈算法"**。已知$C=v_1v_2\cdots v_\nu v_1$是G的一个Hamilton圈，我们用下面的算法把它的权减小。

算法：

（1）在C上检查是否有$i\neq j$，使得$v_{i-1}v_j\in E(G)$，$v_iv_{j+1}\in E(G)$，且$w(v_{i-1}v_j)+w(v_iv_{j+1})<w(v_{i-1}v_i)+w(v_jv_{j+1})$；有，则构成新圈

$$C_1=v_1v_2\cdots v_{i-1}v_jv_{j-1}\cdots v_iv_{j+1}v_{j+2}\cdots v_\nu v_1.$$

C_1叫做C的改良圈。

（2）用C_1代替C转(1)，直至终止。

上述算法得到的Hamilton圈未必是"理想Hamilton圈；不过上述算法的时间复杂度是$O(\nu^2)$。

例 13 从北京到伦敦(L)、墨西哥城(MC)、纽约(NY)、巴黎(Pa)、东京(T)各城去环球讲学，乘飞机到各城恰去一次再返回首都北京，应取何种安排最省旅费？各城相距做为边权在图4.17中标出。

解 执行改良圈算法的过程见图 4.18. 初始圈为 $C=$(Pe)(T)(L)(MC)(NY)(Pa)(Pe)，算法终止时的改良圈为 $C_3=$(Pe)(T)(MC)(NY)(L)(Pa)(Pe). 按 C_3（或逆时针方向的 C_3）安排访问讲学的总航程是

$$13+70+21+35+2+51$$
$$=192(\text{百公里}).$$

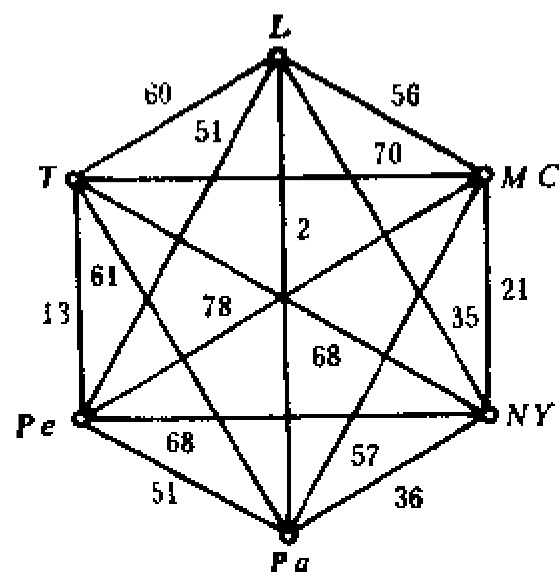


图 4.17

192是理想 Hamilton圈的上界，下面考查其下界. 在第二章例 5 中，我们已用 Kruskal 算法求得了最优树 T，又 $\forall v\in G$，理想圈 C_0 上删去 v 是 G 的一个生成树，

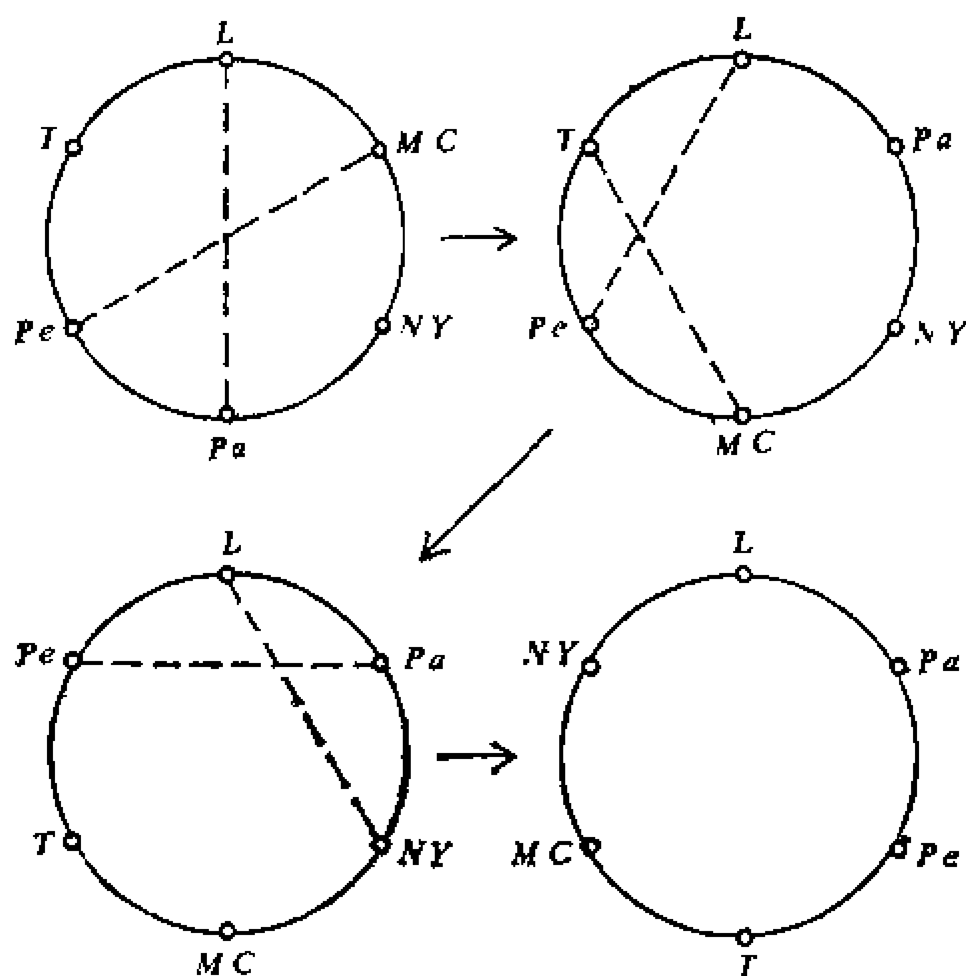


图 4.18

在 C_0 上有两条与 v 关联的边，我们从 G 上与 v 关联的边中选两条其权之和最小者为 e_1，e_2，则 $W(C_0) \geq W(T) + w(e_1) + w(e_2)$。

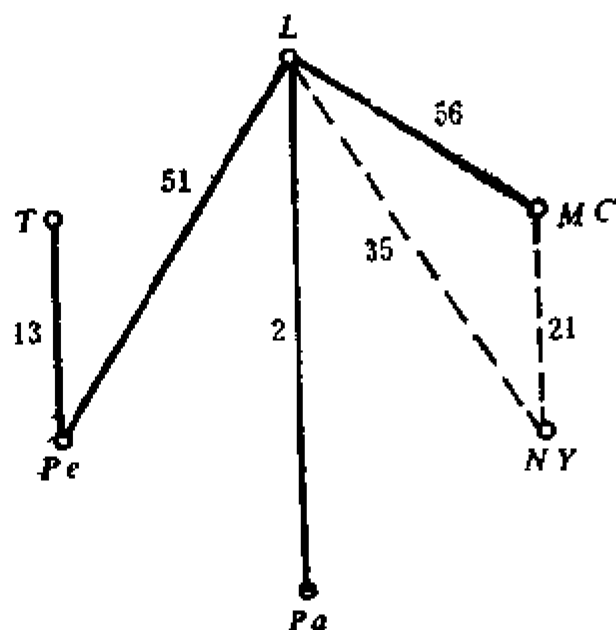


图 4.19

在本题中，我们取 v = NY，e_1 = (NY)(MC)，e_2 = (NY)(L)（见图 4.19），则得 $W(C_0) \geq 122 + 21 + 35 = 178$（百公里）。可见，我们的改良圈与理想 Hamilton 圈之差≤14（百公里）。

Euler 图和Hamilton图是两个最漂亮的图类，它们都有可行遍的性质。Euler 图可以从任何一顶出发不重复地行遍所有的边；Hamilton 图可以从任何一顶出发不重复地行遍所有的顶。而且两者都可返回出发点。

本章的重点内容是：

（1）Euler 图与 Hamilton 图的定义。

（2）Euler 图和“一笔画”的充要条件。

（3）Ore 定理和 Bondy 的闭包判别法。

（4）中国邮路问题和 Fleury 算法。

（5）货郎问题及其困难之所在。

我们对 Hamilton 图的概念似乎已经十分清楚，事实上，我们对它的认识十分肤浅，连判断一个图是否 Hamiltno 图的有效算法也不知是否存在。Hamilton 图的研究从来是图论中既困难又吸引人的课题。

习　　题

1．G是Euler图，则G的每个块亦是Euler图。

2．G是连通图，有$2k>0$个奇次顶，则G有k条无公共边的行迹$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$，使得

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{k} E(Q_i).$$

3．G是非平凡Euler图，$v \in V(G)$，则G中每一条起点为v的行迹可以延长成G的Euler回路的充要条件是$G-v$是林。

4．一个图是由顶v_0可任意行遍的，若经过下列步骤总是产生一条Euler回路：由v_0出发，经任何一条与之关联的边，达到一顶u后由任何一条尚未用过的与u关联的边离开u，继续下去，直至用遍所有的边。证明：Euler图G是可由v_0任意行遍的，当且仅当G的每个圈含v_0。

5．一个图称为随意可溯的（随意Hamilton的），若一条生成道路（Hamilton圈）总可以如下产生：从G的任何一顶出发，然后进入任何一个还未进入过的邻顶，直至没有新的顶可以进入。证明：$\nu \geq 3$的图G是随意可溯的，当且仅当它是随意Hamilton的。这种图仅仅是C_ν，K_ν，或$K_{\nu,\nu}$之一。

6．G不是2连通图，或G是2分图但其顶划分$|X| \neq |Y|$，则G不是Hamilton图。

7．若G有Hamilton轨，则$\forall S \subset V$，皆有$\omega(G-S) \leq |S|+1$。

8．G中任二顶之间皆有Hamilton轨，则称G是Hamilton连通的。证明：G是Hamilton连通的，且$\nu \geq 4$，则$\varepsilon > \left[\frac{1}{2}(3\nu+1)\right]$。

9．G不是Hamilton图，但$\forall v\in V(G)$，$G-v$是Hamilton图，则称G为亚Hamilton圈．证明Petersen图是亚Hamilton图．

10．证明图4.4中的$xuywvzwyxuwvxzyx$是理想回路．

11．$K_{n,n}$中有$\left[\frac{n}{2}\right]$个无公共边的Hamilton圈．

12．用n条（$n>1$）水平线与n条竖直线相截得一图，以n^2个交点为顶，以截得的线段为边，问这个图是否有Hamilton轨和Hamilton圈？

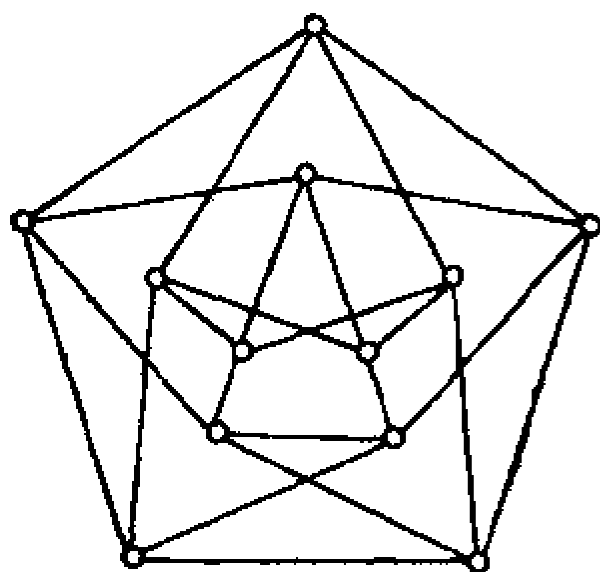


图 4.20

13．英国亚瑟王有n名骑士，每次聚会他们围一圆桌就坐，若两名骑士只能相邻一次，问这样的聚会能进行多少次？

14．亚瑟王在宫中召见他的$2n$名骑士，其中某些骑士间互有仇怨，每个骑士的仇人不超过$n-1$个，证明亚瑟王的谋士摩尔林能够让这些骑士围着那张著名的圆桌就坐，每个骑士不与他的仇人相邻．

15 “易滕”难题：今有1 cm^3的小立方体四个，它们的每个面用红、黄、兰、绿四色之一染成，请把这四个立方体堆成高4 cm的四棱柱，使柱的每一侧面上都出现四种颜色．

16．求Chvatal图上的Euler回路（图4.20）．

17．$\nu=2k+1$的k次正则图是Hamilton图($k>1$)．

18．用改良圈算法求下面货郎问题的近似解，距离矩阵为D，v_1是出发的商店，v_2,v_3,v_4,v_5是要去卖货的村镇：

$$D\begin{pmatrix} 0 & 34 & 2 & 50 & 59 \\ 34 & 0 & 36 & 68 & 67 \\ 2 & 36 & 0 & 51 & 60 \\ 50 & 68 & 51 & 0 & 13 \\ 59 & 67 & 60 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. 在正八面体的每个面上重合地放一个四面体的面，对应于所得的多面体的图是否 Hamilton 图？

20. 一个二十面体是用一张纸制成的，能否把这张纸剪成两份，使剪子剪每个面为两部分，而不通过二十面体的顶点？

21. 一个 n 行 m 列的方格网，每个结点处有一颗珍珠，确定 m 与 n 的值，使剪断一些线之后，做成一个项链.

5 平 面 图

5.1 平面图的概念

相传古代有一位独裁者，临死时留有遗嘱，把土地瓜分给他的五个儿子，这五个儿子在自己的领地上各修筑了一座宫殿，他们还企图修一些道路，使得每两座宫殿之间有一条道路直接相通，又要求道路不能交叉。结果，这五个愚蠢的王子煞费苦心，终告失败。1930年，波兰数学家Kuratowsky给出平面图的充分必要条件，严格证明了五宫修路问题是无解的。

定义 1　一个图称为可嵌入曲面 S，是指把它的图示画在 S 上，可以使任两条边不内交。可嵌入平面的图叫做平面面，否则为非平面图。

例如树皆平面图。K_5 可以嵌入环面（图 5.1），$K_{3,3}$ 可以嵌入Möbius 带（图 5.2）。

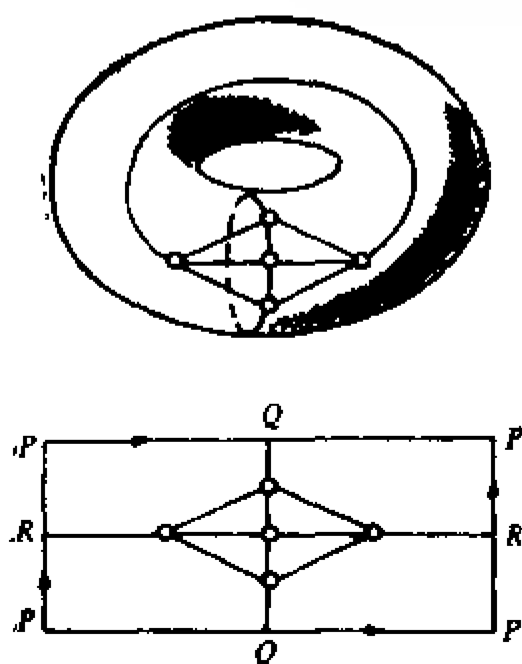


图 5.1

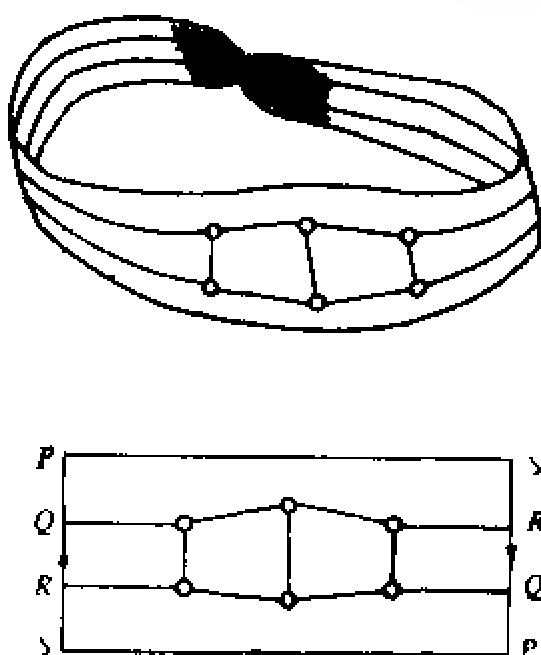


图 5.2

定理 1　任何图皆嵌入 E^3

证　取 E^3 中曲线 l：$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，$t\geqslant 0$。从 l 上任取四个点 (t_i, t_i^2, t_i^3)，$i=1,2,3,4$，$t_i\geqslant 0$，则由于范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4} (t_i - t_j) \neq 0$$

知这四个点不共面，我们把 G 的顶画在 l 上，把边画成直线段，这时不会有任何两条边在内点相交，不然相交的两条线段共面，于是其四个端点共面，与 l 上四点不共面矛盾。所以我们可如此把任何图 G 画在 E^3 中而边不内交。**证毕。**

定理 2　G 是平面图的充要条件是 G 可在球面上嵌入。

证　考虑球极平面射影（图5.3），球 S 与平面 P 相切，过切点的直径的另一端点为 Z（北极）。定义映射 φ：$S\to P$。当且仅当 z，s，p 共线时，$\varphi(s)=p$，其中 $s\in S$，$p\in P$。φ 是一一映射（P 上的 ∞ 点与 Z 对应）。

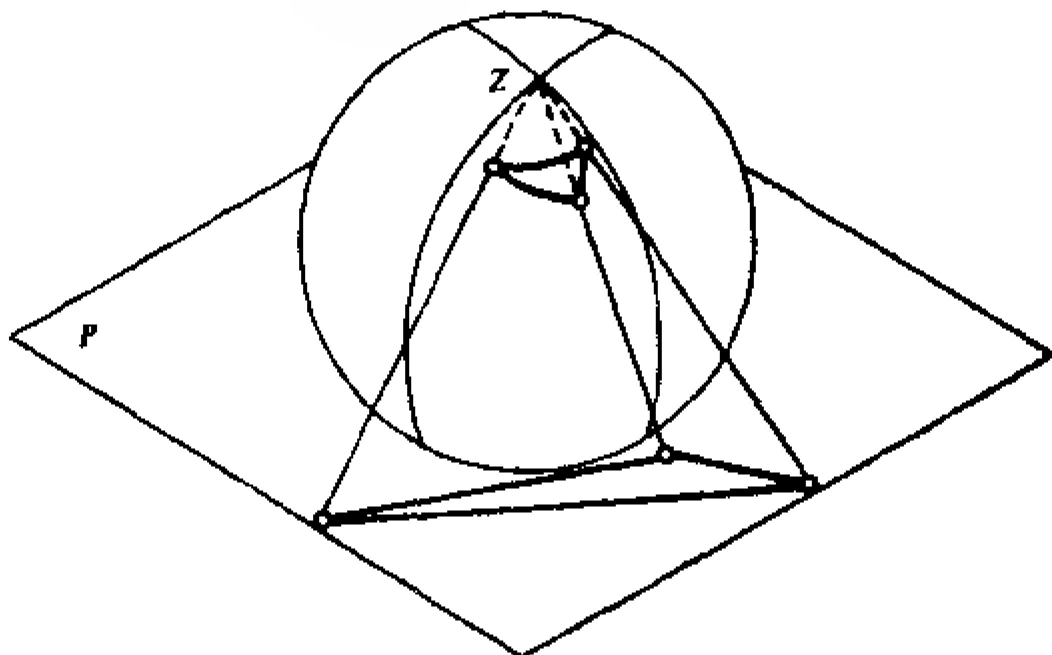


图 5.3

若图G有平面嵌入G'，则由φ，G' 在S上的原象即G在S上的嵌入；反之。若 G'' 是G在S上的嵌入，不妨设 z 不在 G'' 的边上或顶上，则由φ，G'' 之象即为G的平面嵌入。**证毕.**

5.2 Euler 公式

一张鱼网上结点间的线段数目，可以数一数结点和网孔算出来，计算的公式就是著名的Euler 公式。

定义 2 平面图G之平面嵌入把平面分成若干个连通的闭区域，每个这种闭区域叫做G的一个面，那个无界面叫做G的外面。

定理 3 v 是平面图的顶点，则可以把G嵌入在平面上，使 v 在外面上。

证 考虑G的一个球面嵌入，由定理2，这种嵌入是存在的。令N是球面上含 v 的闭区域的内点，以N为北极进行球极平面映射，则得所求之平面嵌入—— v 被嵌入外面上。**证毕.**

定理 4 (Euler，1736) **G是连通平面图，则**

$$\nu-\varepsilon+\phi=2,$$

其中ϕ是G的面数.

证 对ϕ进行归纳法证明. $\phi=1$ 时，G 中无圈，又G 是连通图，故G是树，$\varepsilon=\nu-1$，于是$\nu-\varepsilon+1=2$，公式成立，假设$\phi\leqslant n(n\geqslant1)$ 时，公式已成立，考虑 $\phi=n+1$ 的情形。

由于 $\phi=n+1\geqslant2$，有圈，设 e 是某面上的边，则 $G-e$ 仍连通，而被 e 分隔的G中的两个面在 $G-e$ 中成为一个面，且$G-e$ 仍为平面图，由归纳法假设，

$$\nu(G-e)-\varepsilon(G-e)+\phi(G-e)=2,$$

$$\nu(G)-[\varepsilon(G)-1]+[\phi(G)-1]=2,$$

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2.$$

证毕.

推论 1　平面图的面数与平面嵌入的方式无关。

推论 2　平面图平面嵌入时，有界面的个数恰为余树的边数。

例 1　对哪些 n，存在 n 条棱的多面体？

解　以多面体的顶点为顶点，以多面体的棱为边，构成一个连通平面图 G。则 $\nu(G)\geqslant 4$，$\phi(G)\geqslant 4$，由 Euler 公式，$\varepsilon(G)\geqslant 6$。即无棱数小于 6 的多面体。

四面体是棱数为 6 的多面体。因为 $2\varepsilon(G)\geqslant 3\phi(G)$，若有 7 条棱的多面体，则 $\phi\leqslant\frac{14}{3}$，即 $\phi=4$，于是

$$7=\nu(G)+\phi-2=\nu+2,$$

$\nu=5$，但 $\phi=4$ 时，唯一的多面体是四面体，它只有四个顶，可见，无 7 棱多面体。

考虑 $k\geqslant 4$，以 k 边形为底的棱锥为 $2k$ 条棱的多面体。若把 $k-1$ 边形为底的棱锥底角处一个三面角"锯掉一个小尖儿"，得到 $2k+1$ 条棱的多面体。总之 $n\geqslant 6, n\neq 7$ 时，有 n 条棱的多面体。

5.3　平面图的对偶图

定义 3　G' **是平面图** G **的平面嵌入，则如下画出的图** G^* **是** G **的一个对偶图：**

（1） G' **的每个面内画且仅画** G^* **的一个顶点** f^***。**

（2）当且仅当面 f_i **与面** f_j **有公共边** e_k **时，画** G^* **的一条边** $e_k^*=f_i^*f_j^*$**。**

（3） e **为** G' **的桥时，画** G^* **的一个环，此环与** e **所在的面内的顶** f^* **相关联（图 5.4）。**

同一个平面图的不同平面嵌入方式，可能会形成不同构的对偶图。例如图 5.4 中有一次顶，有桥，但此桥还可以嵌入含 f_5^* 或含 f_2^* 的面，从而环关联的顶可以是 f_2^*，可以是 f_5^*，也可以是 f_7^*。

又例如图 5.5 是同一个平面图的两种平面嵌入，相应的对偶图显然不同构，(a) 的对偶图中有 5 次顶（在外面内），而 (b) 的对偶图无 5 次顶。

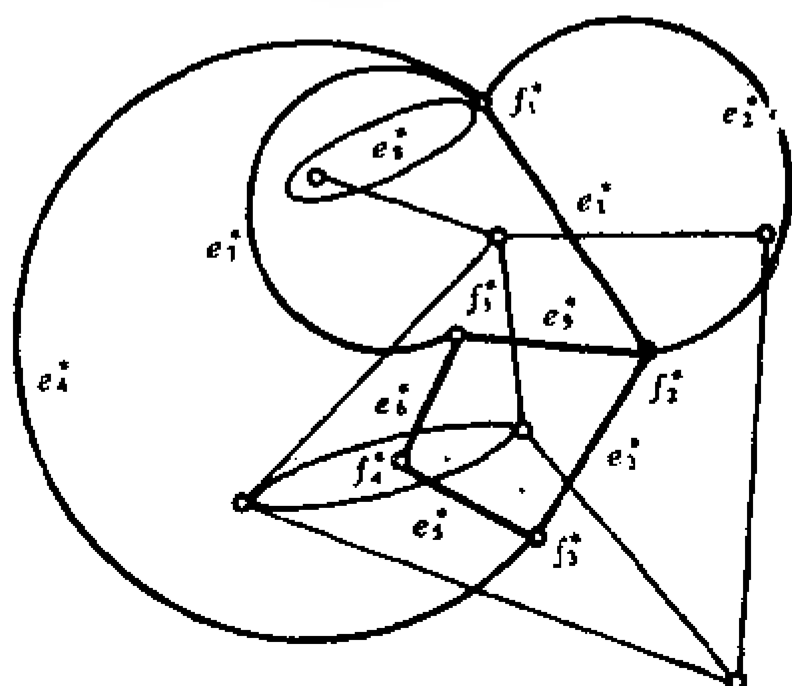
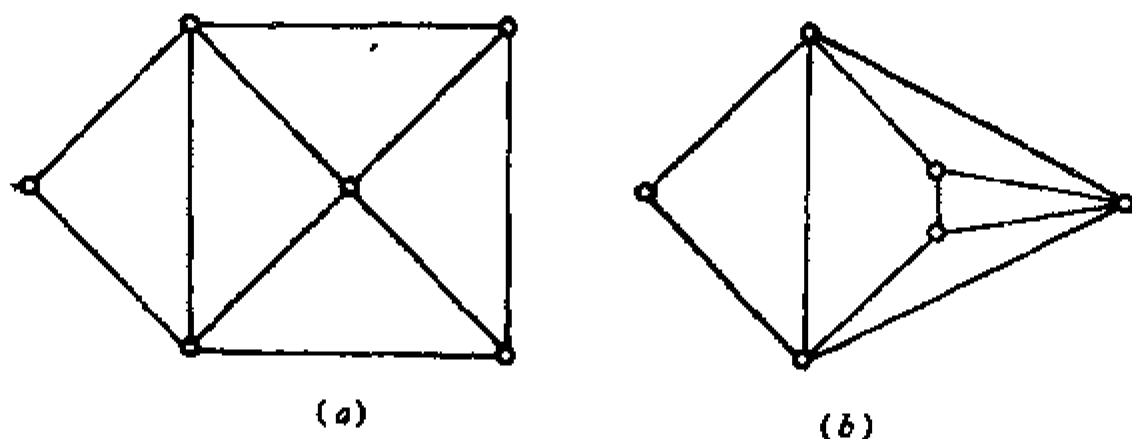


图 5.4

记 $F(G)=\{f_1, f_2,\cdots,f_\phi\}$，是平面图平面嵌入的面集合；$d(f)$ 是 $f\in F(G)$ 时，f 边界上的边数，叫做面 f 的次数；一条边是平面图的桥时，$d(f)$ 中此边贡献为 2 。



(a)　　　　(b)

图 5.5

容易看出，G为平面图，则有

(1) $\phi(G)=\nu(G^*)$，$\varepsilon(G)=\varepsilon(G^*)$，$d(f)=d_{G^*}(f^*)$。

（2）每个平面图皆有对偶图，未必唯一，但对偶图仍为平面图。

（3）G连通时，$(G^*)^*=G$。

（4）平面图 $G_1\cong G_2$，未必 $G_1^*\cong G_2^*$。

定理 5 G **为平面图，则对任给的平面嵌入，皆有**

$$\sum_{f\in F(G)} d(f)=2\varepsilon.$$

证

$$\sum_{f\in F(G)} d(f)=\sum_{f^*\in V(G^*)} d(f^*)=2\varepsilon(G^*)=2\varepsilon(G)$$ **。证毕。**

推论 3 $\nu\geqslant 3$ **的平面图**，$\varepsilon\leqslant 3\nu-6$。

证 只需对连通平面图来证明。因 $\nu\geqslant 3$，显然 $d(f)\geqslant 3$，其中 $f\in F(G)$。又 $2\varepsilon=\sum\limits_{f\in F(G)} d(f)\geqslant 3\phi$，由 Euler 公式 $\nu-\varepsilon+\phi=2$，$3\nu-3\varepsilon+3\phi=6$，$3\nu-6=3\varepsilon-3\phi\geqslant 3\varepsilon-2\varepsilon=\varepsilon$，即 $\varepsilon\leqslant 3\nu-6$。**证毕。**

推论 4 δ（**平面图**）$\leqslant 5$。

证 $\nu=1$ 或 2，命题显然成立。当 $\nu\geqslant 3$ 时，由推论 3，

$$\delta\nu\leqslant\sum_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon\leqslant 2(3\nu-6),$$

$$\delta\leqslant 6-\frac{12}{\nu},$$

故得 $\delta\leqslant 5$。**证毕。**

平面图的边数，在 ν 固定后，不会太多，不然在平面上嵌入时"放不下"，推论 3 与推论 4 反映的正是这一情形。

定义 3 G **为平面单图，若对任何不相邻的顶** u **与** v，$G+uv$ **不再是平面图，则称** G **是极大平面图。**

这里顺便说一下，**"最大"与"极大"是有区别的**，"最大"是指某个量不能再增大；"极大"是在集合包含义下不能再扩大，

即不能在原有的基础上扩大。例如树上每两个叶之间的唯一轨都是极长轨，但只有其中最长的一条才是最长轨。极大的可以不唯一，而且量也未必一致；最大的就量而论是唯一的。最小与极小亦应作与此相应的理解。

定理 6 **G 是 $\nu\geqslant3$ 的极大平面图，当且仅当 G 的平面嵌入每个面皆 3 次。**

证 设 G' 是极大平面图 G 的平面嵌入，G' 中有一个面的边界不是 K_3，这个面的边界是 $v_1v_2v_3\cdots v_kv_1$，$k\geqslant4$。则在此面内可加一边，事实上，若多边形 $v_1v_2v_3\cdots v_kv_1$ 的对角线 $v_iv_j\in E(G)$，则多边形 $v_1v_2\cdots v_kv_1$ 上 v_i 的两个邻顶之间在 G 中不相邻，于是我们可以在此二顶之间加一边，得到的图仍是平面图，与 G 为极大平面图矛盾。

反之，若 G' 的每个面皆 3 次，则由 $\sum\limits_{f\in F(G')} d(f)=2\varepsilon$，$3\phi=2\varepsilon$，及 G 是连通图，从 Euler 公式 $\nu-\varepsilon+\phi=2$ 得 $\varepsilon=3\nu-6$。而由推论 3，平面图边数之上界是 $3\nu-6$，所以 G 是极大平面图。**证毕。**

定理 7 **$\nu\geqslant4$ 的平面图 G 为极大平面图，则 $\delta(G)\geqslant3$。**

证 $\forall v\in V(G)$。由于 G 是平面图，则 $G-v$ 也是平面图，v 在 $G'-v$ 的一个面 f' 的内部，这里 G' 是 G 的平面嵌入。由于 G 是极大平面图，$G-v$ 的顶至少有三个在上述 $G'-v$ 的面 f' 的边界上，即得 $d(v)\geqslant3$。由 v 之任意性，$\delta(G)\geqslant3$。**证毕。**

推论 5 **G 是极大平面图，则 $\varepsilon=3\nu-6$。**

由此可知，极大平面图的边数达到平面图边数（顶数给定为 ν）的上界，故极大平面图就是最大平面图，反之亦然。

推论 6 **平面 Euler 图可表成不超过 $\nu-2$ 个无公共边的圈的并。**

这里应注意的是，对于非平面 Euler 图，虽然猜想推论 6 的结论仍成立，但至今尚未证明。

5.4 Kuratowsky定理

定理 8 K_5 **和** $K_{3,3}$ **都是非平面图。**

证 $\nu(K_5)=5$，$\varepsilon(K_5)=10$，$3\nu-6=3\times5-6=9$，不满足平面图的必要条件 $\varepsilon\leqslant3\nu-6$，故 K_5 非平面图。

$K_{3,3}$ 是二分图，无奇圈，所以无子图 K_3；若 $K_{3,3}$ 是平面图，每面次数至少是 4，于是

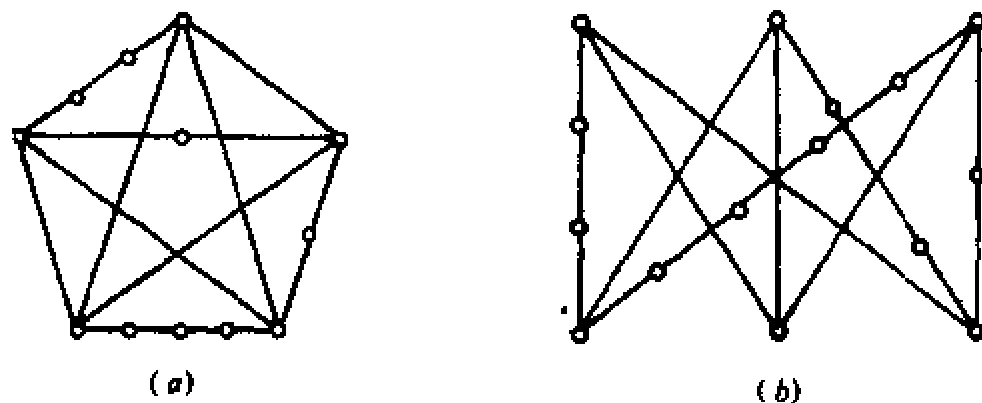
$$4\phi\leqslant\sum_{f\in F(K_{3,3})}d(f)=2\varepsilon=2\times9=18,$$

故有 $\phi\leqslant4\frac{1}{2}$，即 $\phi\leqslant4$，由 Euler 公式，

$$2=\nu-\varepsilon+\phi\leqslant6-9+4=1,$$

这是不可能的。**证毕。**

两个图叫做**同胚**的，若一个图是另一图边上"加上"一些新顶得到的；规定图**自同胚**。图 5.6 中画的是K_5 与 $K_{3,3}$ 的同胚图。



(a) (b)

图 5.6

1930年，波兰数学家 Kuratowsky 指出，K_5 或 $K_{3,3}$ 的同胚图是引起图不能嵌入平面的仅有的两个"疙瘩"。

定理 9 (Kuratowsky,1930) **G 是平面图的充要条件是 G 中无与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图。**

证 条件的必要性不足道，下证充分性。（以下证明是1954年Dirac和Schuster给出的）设G中无K_5或$K_{3,3}$的同胚做子图，但G是非平面图。令G是边数最少的这种图，则G是块，且$\delta(G)\geq 3$。令$x_0=u_0v_0\in G$，则$F=G-x_0$是平面图。

1） F中有含u_0和v_0的圈。

若F中无含u_0和v_0的圈，则u_0与v_0在F的不同的块中。从而存在F的一个割顶w，它在每条u_0-v_0轨上。若F中没有边wu_0与wv_0，我们把它们加入F构成图F_0。F_0中u_0与v_0仍在不同的块中，例如分别在B_1与B_2中。B_1与B_2有公共顶w。B_1与B_2都比G边数少，故B_1或者是平面图或者含有一个同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。然而，若加入wu_0后产生了B_1的一个同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图H，则用以边x_0开始从u_0到w的一条轨代替wu_0，得到的G的子图同胚于H，从而也同胚于K_5或$K_{3,3}$，矛盾。从而B_1（同理B_2）是平面图。B_1与B_2都可画在平面上，使得wu_0与wv_0在外面上，从而F_0可嵌入平面，使wu_0与wv_0在外面上。加入x_0不破坏F_0的可平面性，因为G是F_0+x_0的子图，故G是平面图，矛盾。

2） 把F嵌入平面，使含u_0和v_0的一个圈Z含有数目最多的面。指定Z的一个方向（例如顺时针方向），$Z[u,v]$是Z上从u到v的轨，若v在Z上不是紧跟着u的，用$Z(u, v)$表示$Z[u,v]$删去u和v得到的轨。

Z的外部是指由Z外的顶导出的F的子图。这个子图的连通片，叫做外部连通片。Z的外桥是指F的一个子图，它由关联于至少一个在某个外部连通片的顶点的所有边导出或者由在Z外部且与Z的二顶关联的一条边导出。类似地可以定义Z的内部、内部连通片与内桥。称一个外桥或内桥是分离$u-v$的，若它与$Z(u,v)$，$Z(v, u)$上都有公共顶。显然，若u与v在Z上相邻，任何一个外桥或内桥都不会分离$u-v$。

因为F是连通的，又F没有割顶，所以每个内桥与外桥至少

与Z有两个公共顶。没有外桥可以与$Z(u_0, v_0)$或$Z(v_0, u_0)$有一个以上的公共顶，因为否则就有一个含u_0，v_0的圈，有比Z更多的内部面数。同理没有外桥可以以u_0或v_0为与Z的公共顶。从而每个外桥与Z恰有两个公共顶，且分离u_0-v_0。此外，由于不能在F中加入x_0而保持平面性，所以至少有一个分离u_0-v_0的内桥。

3）存在一个分离u_0-v_0的外桥，它与$Z(u_0, v_0)$有公共顶u_1，与$Z(v_0, u_0)$有公共顶v_1，使得存在一个内桥，它分离u_0-v_0又分离u_1-v_1。

若3）不真，我们会找到矛盾。为此，把分离u_0-v_0的内桥进行编号，从u_0起沿Z前进，按公共顶出现的次序给相应的内桥编号为I_1，I_2，I_3，…；I_1是从u_0起在Z上最先遇到它的顶的内桥。令u_2与u_3是I_1与$Z(u_0, v_0)$的第一个和最后一个公共顶；v_2，v_3是I_1与$Z(v_0, u_0)$的第一个和最后一个公共顶。每个外桥与Z的两个公共顶必在$Z[v_3, u_2]$上或在$Z[u_3, v_2]$上，不然，就会有一个外桥与$Z(u_0, v_0)$有公共顶u_1，与$Z(v_0, u_0)$有公共顶v_1，而有一个内桥既分离u_0-v_0又分离u_1-v_1，与3）不真矛盾。所以可以在Z的外部区域画一条联结v_3和u_2的曲线C，使它不与F的边接触（图5.7）。于是I_1可以保持平面嵌入地转移到C的外面，类似地，分离u_0-v_0的内桥都可依次保持平面嵌入地转移到C的外面，这样边x_0可以加上去而不损坏F的可平面性，然而这是不可能的，所以3）成立。

4）令H是3）中指的内桥，它分离u_0-v_0，又分离u_1-v_1。令H与$Z(u_0, v_0)$，$Z(v_0, u_0)$，$Z(u_1, v_1)$，$Z(v_1, u_1)$的公共顶分别是w_0，w_0'，w_1，w_1'。依上述四顶的分布，分四种情形讨论之（图5.7）

（1）顶点w_1与w_1'中有一个在$Z(u_0, v_0)$上，而另一个在$Z(v_0, u_0)$上。我们可以取$w_0=w_1$，$w'=w_1'$。在这种情形，

G中含$K_{3,3}$子图（图5.7(*a*)），$K_{3,3}$的顶划分成空心与实心两种，空心者与实心者相邻。

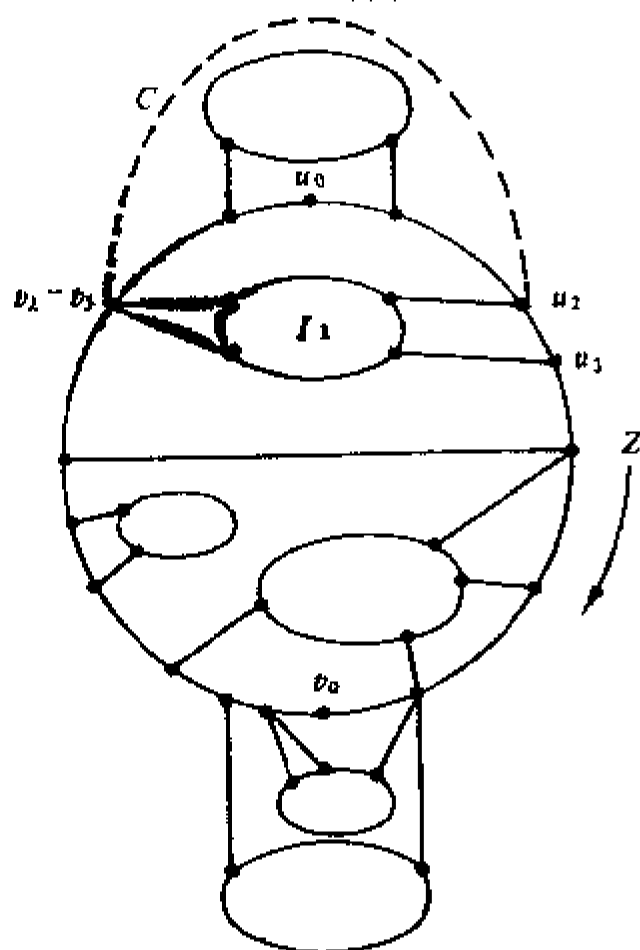


图 5.7-1

（2）w_1与w_1'都在$Z(u_0, v_0)$上或$Z(v_0, u_0)$上，不失一般性，我们取第一种情形。又有两种可能：$v_1 \neq w_0'$与$v_1 = w_0'$。若$v_1 \neq w_0'$，则G含有同胚于$K_{3,3}$的子图。依赖于w'在$Z(u_1, v_1)$上或在$Z(v_1, u_1)$上，分别如图5.7(*b*)或(*c*)。若$v_1 = w_0'$(图5.7(*d*))，则H含一个顶点r，存在由r开始到w_1，w_1'和v_1的三条不相交的轨，它们的所有顶点（除了w_1，w_1'和v_1外）都属于H。这时G也含有$K_{3,3}$的同胚子图。

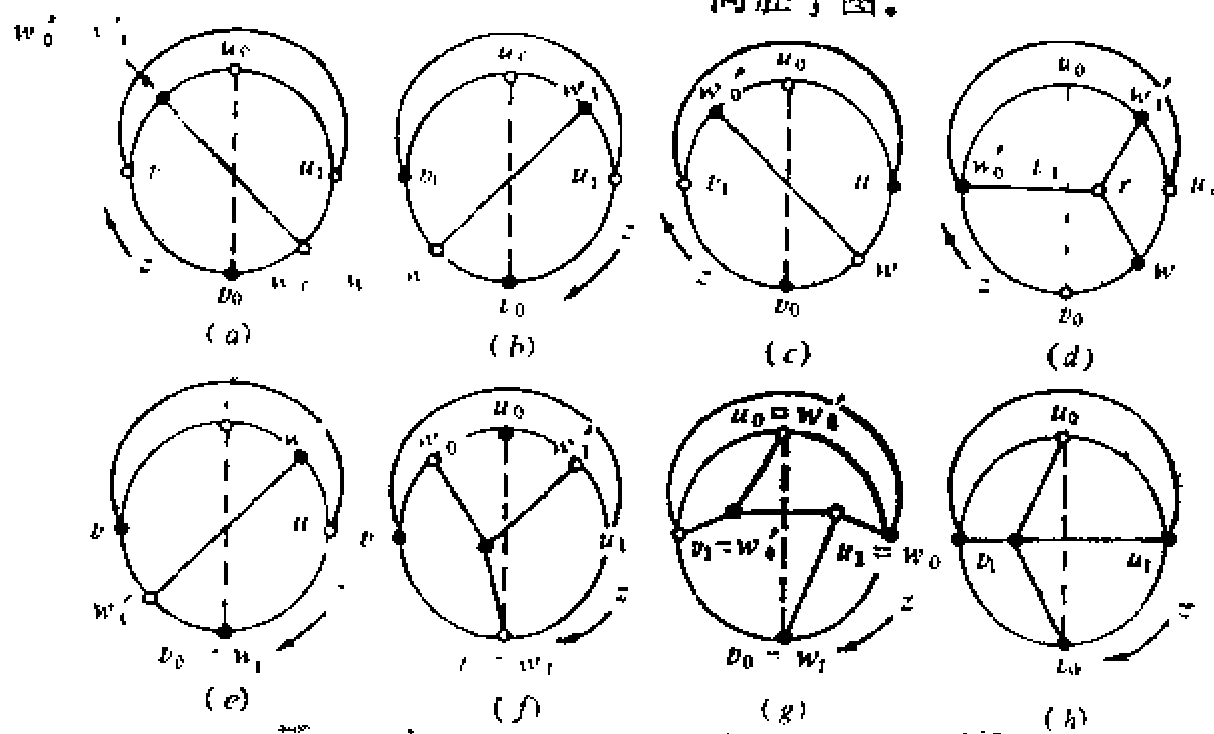


图 5.7-2

(3) $w_1=v_0$ 和 $w_1'\neq u_0$。不失一般性，令 w_1' 在 $Z(u_0, v_0)$ 上，G 又含 $K_{3,3}$ 同胚的子图。若 w' 在 $Z(v_0, v_1)$ 上，则如图 5.7(e) 所示，G 有一个同胚于 $K_{3,3}$ 的子图。若 w_1' 在 $Z(v_1, u_0)$ 上，如图 5.7(f) 所示，也有 $K_{3,3}$ 的同胚子图，若 $w'=v_1$，修改一下这个图形也容易看出 G 含 $K_{3,3}$ 的同胚子图。

(4) $w_1=v_0$ 且 $w_1'=u_0$，我们设 $w_0=u_1, w_0'=v_1$，否则我们可以得到前三种情形之一。我们分两种子情形考虑，令 P_0 是 H 中从 u_0 到 v_0 的一条最短轨道，P_1 是从 u_1 到 v_1 的一条最短道路。P_0 与 P_1 一定相交。若其交点不止一个，则如图 5.7(g) 所示，G 中含同胚于 $K_{3,3}$ 的子图；否则，如图 5.7(h) 所示，G 中含 K_5 的同胚子图。

(1)，(2)，(3)，(4) 已包括所有可能的情形。**证毕。**

所谓 G **的初等收缩**是删去邻顶 u 和 v，再加上一个新顶 w，使 w 与邻接于 u 和邻接于 v 的每个顶邻接。若 H 是 G 通过一系列初等收缩得到的，则称 G 可收缩到 H。例如 Petersen 图可以收缩到 K_5。

Kuratowsky 定理可以写成：**G 是平面图当且仅当 G 中无可收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。**

最小的妖怪，Petersen 图不是平面图。

5.5 图的厚度

一个图不是平面图，不能把它嵌入平面，于是自然提出分层嵌入几个平面的问题：G 的边集至少可以划分成几个子集，使得每个子集的导出子图都是平面图？

定义 4 如果

$$G=\bigcup_{i=1}^{d} G_i,$$

其中 G_i 皆平面图，$i=1, 2, \cdots, d, E(G_i)\cap E(G_j)=\varnothing$，$i\neq j$；则称 $(G_1, G_2, \cdots, G_d)$ 为 G 的平图分解，而

$\theta(G)=\min\{d\mid(G_1, G_2, \cdots, G_d)$ 是 G 的平面分解$\}$ 称为 G 的厚度或层数。

例如 $\theta(K_5)=2$。见图 5.8.

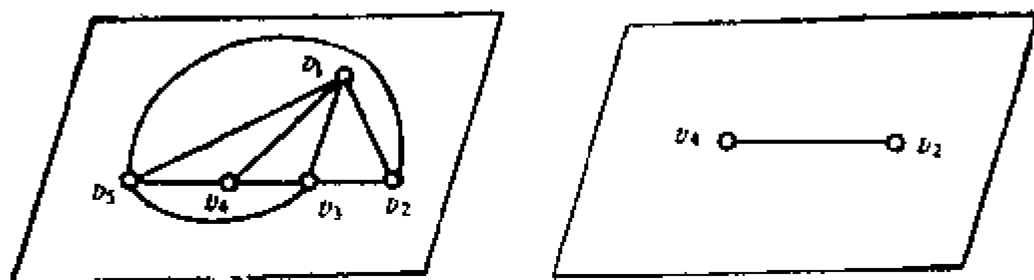


图 5.8

如何确定图的厚度至今既无公式又无有效算法！但厚度及分层嵌入是实际需要的待解问题。例如设计电路板，需要把电路图在平面上实现，问至少需要几块印刷线路板？这个问题实则为求图的厚度及其最少层数分解。

下面给出厚度的下界，$\{x\}$ 表示大于 x 的最小整数。

定理 10 （1） $\theta(G)\geqslant\left\{\frac{\varepsilon}{3\nu-6}\right\}$ $(\nu>2)$。

（2） G 中不含三角形，则 $\theta(G)\geqslant\left\{\frac{\varepsilon}{2\nu-4}\right\}$ $(\nu>2)$。

（3） $\theta(K_\nu)\geqslant\left[\frac{\nu+7}{6}\right]$ $(\nu>3,\ \nu\neq 9)$。

证 （1）对于平面图，$0<\varepsilon\leqslant 3\nu-6$，从而 $(\nu>2)$

$$0<\frac{\varepsilon}{3\nu-6}\leqslant 1,$$

故有

$$\theta(G)\geqslant\left\{\frac{\varepsilon}{3\nu-6}\right\}.$$

(2) 若G是平面图，且不含三角形，G的ϕ个面次数分别为n_1，n_2，…，n_ϕ。显然$n_i \geqslant 4$，$i=1, 2, \cdots, \phi$。又因为

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2e,$$

故得$4\phi \leqslant 2e$，$\phi \leqslant \frac{e}{2}$，由Euler 公式（不妨设$G$为平面图）

$2=\phi+\nu-e \leqslant \frac{e}{2}+\nu-e=\nu-\frac{e}{2}$，$e \leqslant 2\nu-4$，所以$0<\frac{2}{2\nu-4} \leqslant 1$，于是

$$\theta(G) \leqslant \left\{\frac{e}{2\nu-4}\right\}.$$

(3) 由 (1) 得

$$\theta(K_\nu) \geqslant \left\{\frac{e}{3\nu-6}\right\}.$$

又对于K_ν，

$$e = \frac{1}{2}\nu(\nu-1),$$

取

$$a = 1 - \frac{1}{3\nu-6},$$

因$\nu>3$，故$0<a<1$，于是有

$$\theta(K_\nu) \geqslant \left\{\frac{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}{3\nu-6}\right\} \geqslant \left[\frac{\nu(\nu-1)}{6\nu-12}+1-\frac{1}{3\nu-6}\right]$$

$$=\left[\frac{\nu^2+5\nu-14}{6(\nu-2)}\right]=\left[\frac{\nu+7}{6}\right].$$

证毕。

上面给出的$\theta(G)$的下界有时偏离较大，例如Petersen 图，$\theta(\text{Petersen})=2$，但下界给出的是

$$\left\{\frac{e}{3\nu-6}\right\}=\left\{\frac{15}{3\times 10-6}\right\}=\left\{\frac{15}{24}\right\}=1.$$

误差100%。

另外$\theta(K_9)=3$，所以定理10（3）中$\nu\neq9$。

平面图在工程技术上的广泛应用和在图论中的重要性(例如四色问题发生在平面图)，使它与Hamilton图一起，成了图论中十分活跃的课题。从历史上看，正是Kuratowsky定理的提出与证明打破了图论研究的沉闷局面，成了图论振兴的转折点。本章的内容要点是：掌握平面图、对偶图、同胚图、厚度等概念，会证会用Euler公式，理解K_5与$K_{3,3}$的同胚图是造成图非平面性的根源，对于Kuratowsky定理的证明，初学者亦可暂时放下，等图论学习深入一段时间，图论意识的训练充分之后再加以领会，事实上，Dirac等人的证明十分之精彩，很值得一学。

我们用范德蒙行列式证明了任何图可直线段地嵌入E^3，表明我们在图论中的图与三维欧氏空间中的直线形同构。但图论毕竟不是初等立体几何，它研究的不是空间形式与位置关系，而是顶与边的关联关系。

习　　题

1．证明$K_5-e(e\in E(K_5))$是平面图。

2．证明$K_{3,3}-e(e\in E(K_{3,3}))$是平面图。

3．试把K_7嵌入在环面上。

4．一个图为平面图的充要条件是它的每个块皆平面图。

5．平面图若与其对偶图同构，称之为自对偶图。证明

(1) G为自对偶图，则$e=2\nu-2$。

(2) 对每个$n\geqslant4$，作一个n顶自对偶图。

6．G是极大平面图，则其对偶图是2边连通3次正则图。

7．G是$\nu\geqslant11$的平面图，则G^c是非平面图。

8．$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$n\geqslant3$，$S$是平面点集，它的任二

点的距离至少为1，则最多 $3n-6$ 对点，它们的距离为1。

9．正十二面体与正六面体的对偶图是什么？

10．图5.9是平面图吗？

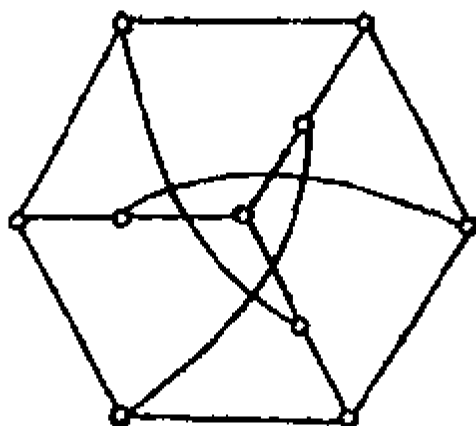


图 5.9

11．G是平面图，则 $\nu-\varepsilon+\phi=\omega+1$。

12．论证正多面体有且仅有哪几种？它们的边数、顶数和面数各是多少？

13．若多面体的每两个面至多有一条公共边，则它至少有两个面有相同数目的边。

14．G由 $K_{3,3}$ 和两个零次顶构成，则 G^* 为非平面图。

15．把平面分成 ϕ 个区域，每两个区域都相邻，问 ϕ 最大是几？

*16．平面图的平面嵌入可以使每条边皆直线段。

17．没有6连通平面图。

18．平面图的平面嵌入可使每个顶点在同一个面上，称其为外可平面图。证明G是外可平面图的充要条件是G不含K_4与$K_{2,3}$的同胚。

6 纵深搜索算法与平面嵌入算法

6.1 广度与深度优先搜索法

本节介绍图论算法中两个关键性算法，一个是**广度优先搜索算法**（Breadth First Search），代号BFS；一个是**深度优先搜索法**（Depth First Search），代号DFS。它们，尤其是DFS给出求生成树、割顶和块的有效算法。DFS还有许多应用，例如在平面图嵌入平面的算法中，扮演了极为重要的角色，而且其思想方法渗透到许多图论算法的设计之中。

6.1.1 BFS算法

（1）$\forall v \in V(G)$，标号 $l(v)=0$，令 $l=0$。

（2）当所有标号为 l 的顶 u 的相关联的边的端点皆已标号时，则转（3）；否则，把与 u 相关联的边的未标号的顶标以 $l+1$，并记录这些边，用 $l+1$ 代替 l，转（2）。

（3）止。

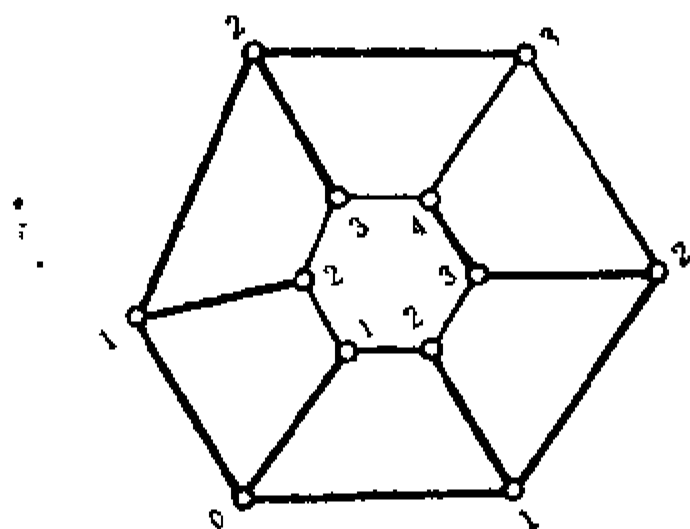


图 6.1

例 1　在图6.1中求生成树。

图6.1中粗实线表示一个生成树。

定理 1　BFS终止，仍有未标号的顶，则G不连通；否则，记录下的边导出的子图是G的一个生成树。

证 由BFS的过程，标号之顶与0号顶连通，从而，终止时所有顶已被标号，则记录下来的边之导出子图是G的连通生成子图，又顶不二次标号，故此生成子图无圈，即它是生成树。否则，未标号的顶必与已标号的顶不连通，即G为不连通图，**证毕**。

6.1.2 DFS算法

DFS算法是图论中的首要算法，为理解它的思路，我们追溯到1690年修筑的威廉王迷宫，它至今还保存着（图6.2）。

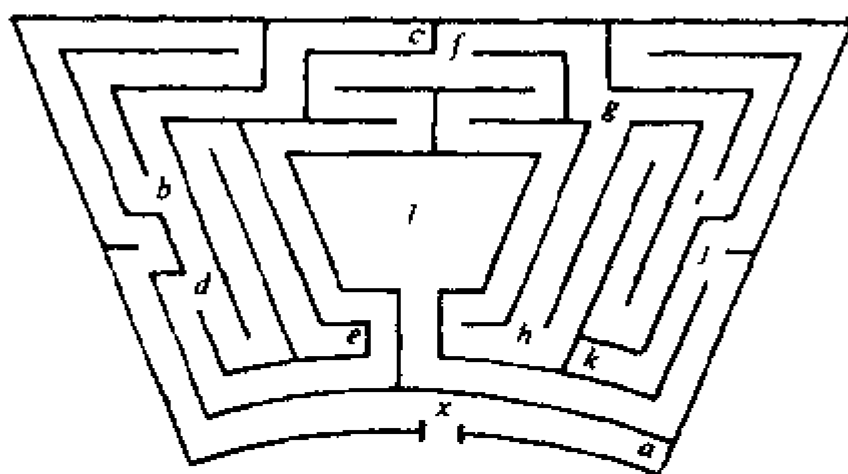


图 6.2

迷宫法则：任务是从迷宫入口处出发，每个走廊都要搜索，最后再从入口出来。为了不兜圈子，我们可以记住哪些走廊已经走过，沿着未走过的通道尽可能远地走下去，走到死胡同或那里已无未走过的走廊可选时，沿原路返回，到达一个路口，发现可通往一条未走过的走廊时，沿这一未走过的走廊尽可能远地走下去，…，最后即可搜索遍全部走廊和厅室，再由入口处出迷宫。

相传雅典王子忒修斯冲进克里特岛的迷宫去斩除吃人的牛身人面妖精米诺托时，为了让忒修斯留下退路，且不忘记哪些走廊已被搜索，公主亚丽阿特涅给了他一只绒线球，告诉他："把线的一头栓在迷宫大门上，你呢，一边走，一边放开线球。"

由上述的故事，启发人们设计了如下的

DFS 算法（Hopcroft, Tarjan, 1973）：

（1）标志一切边"未用过"，对每顶 $v \in V(G)$，$k(v) \leftarrow 0$。令 $i \leftarrow 0$，$v \leftarrow s$。

（2）$i \leftarrow i+1$，$k(v) \leftarrow i$。

（3）若 v 无未用过的关联边，转（5）。

（4）选一条未用过的与 v 关联的边 $e=uv$，标志 e"用过"；若 $k(u) \neq 0$，转（3）；否则（$k(u)=0$），$f(u) \leftarrow v$，$v \leftarrow u$，转（2）。

（5）若 $k(v)=1$，止。

（6）$v \leftarrow f(v)$，转（3）。

$k(v)$ 叫做顶 v 的 DFS 编码；$f(v)$ 叫做顶 v 的父亲，v 叫做 $f(v)$ 之子；以父为尾，以子为头的有向边叫做**父子边**。

上述 DFS 的时间复杂度是 $O(|E|)$。

定理 2 *G* **为连通图，则** DFS **中产生的父子边导出的子图是以** s **为根的外向生成树。**

证 显然，在父子边导出的子图上，$d^-(s)=0$，$d^-(v)=1$ $(v \neq s)$。父子边导出的子图显然是无圈连通图（作为无向图而言），所以是树。考虑序列 v_0，v_1，v_2，$\cdots$，其中 $f(v_i)=v_{i+1}$ $(i \geqslant 0)$，其中 $v_0=v \neq s$，因 $f(s)$ 不存在，故这一序列止于 s。这些给出从 s 到 v 的一个有向轨。由 v 的任意性，可见父子边导出的子图是以 s 为根的外向生成树（图6.3）。**证毕。**

图 6.3 是 DFS 执行过程的示意图，有方向的粗实线尾为父，头为子，是父子边，它们导出生成树，而且是以 DFS 出发点 s 为根的外向树。

图 6.3 中的虚线是返回路线，*G* 中非父子边叫做**返回边**，例如 sv_3 是返回边。

显然，在 DFS 搜索中，每边恰通过两次，又回到出发点。如果我们把每条边都再附着一条重边，则 *G* 变成了Euler 图，于是 DFS 过程就是沿 Euler 回路旅游的过程。但是，这里不能用

Fleury 算法，这里的图整体结构是未知的——就象忒修斯不

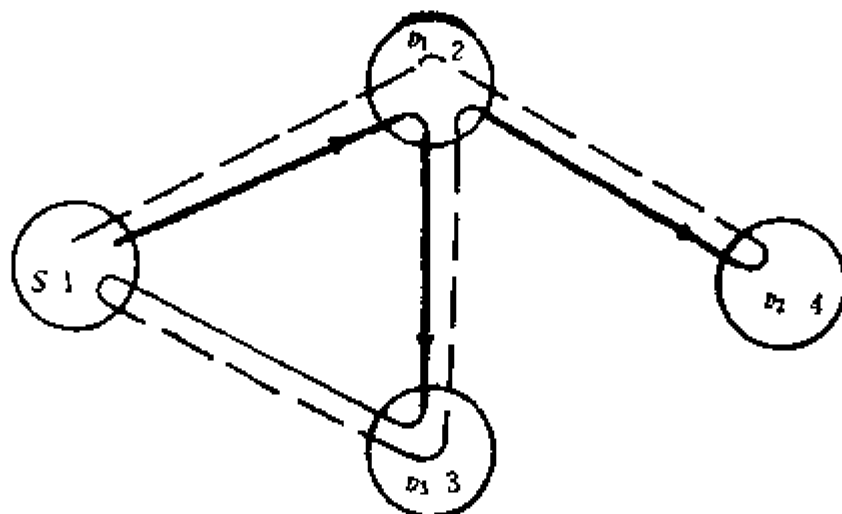


图 6.3

知道迷宫的图一样，只知道所到之顶点是几次的，以及执行DFS的过程所做的（已到的边与顶上的）标志，要求我们探索出一条行遍性路线，再回到出发点，可见DFS的作用有两点：（1）能把一个图的未知结构，即边顶关联关系搞清楚；（2）同时找到了一棵生成树。

定理 3 在DFS中，$e=ab$ 是返回边，则要么 a 是 b 之祖先，要么 a 是 b 之后代孙．

证 设 $k(a)<k(b)$，在DFS的活动中心，即算法中的 v，只沿父子边移动．若 a 不是 b 之祖先，但由于 $k(a)<k(b)$，a 比 b 先"生"．则活动中心移到 b 之前，已从 a 移到 a 的某个前辈．然而，由算法知，仅当与 a 关联的边皆被用过后才倒行至其父，这说明 e 已被用过，b 已被发现，$k(b)<k(a)$，与 $k(a)<k(b)$ 矛盾，故 a 是 b 之祖先．

若 $k(b)<k(a)$，则可证得 a 是 b 的后代孙．**证毕．**

例如图6.3中 sv_3 是返回边，s 是 v_3 之"祖父"，v_3 是 s 之"孙"．

6.1.3 求割顶与块的算法

设连通图 G 已被DFS定向，返向边以祖为头．我们规定顶

v 的标号 $l(v)$：从 v 出发沿有向轨可以到达的顶 u 中 $k(u)$ 的最小值，此轨长可以为0，但至多允许含一条返回边。例如图 6.4 中，顶上第一个数是 $k(v)$，第二个数是 $l(v)$。

$$l(v_1)=7,\ l(v_2)=l(v_3)=l(v_4)=1,$$
$$l(v_5)=l(v_6)=l(v_7)=2.$$

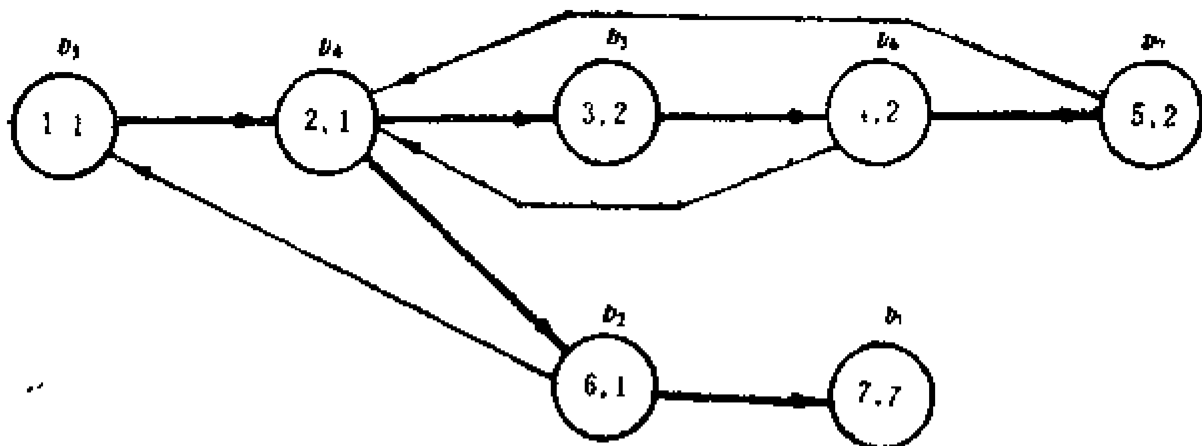


图 6.4

定理 4 DFS 中，$e=uv$ **是父子边，且** $k(u)>1$，$l(v)\geqslant k(u)$，**则** u **是割顶。**

证 令 S 是从根 r 到 u 的轨上含 r 而不含 u 的一切顶组成的集合；T 是 v 为根的子树上的顶集。由定理3，不存在连接 T 与 $V-(S\cup\{u\}\cup T)$ 的边。若存在连接 $t\in T$，$s\in S$ 的边 ts，则它是返回边，且 $k(s)<k(u)$。这时 $l(v)\leqslant k(s)<k(u)$，与已知 $l(v)\geqslant k(u)$ 矛盾，故 ts 这种边不存在，故 u 是割顶。**证毕。**

例如图 6.4 中，v_4v_5 是父子边，且 $k(v_4)=2>1$，$l(v_5)=2$，又 $k(v_4)=2$，由定理 4，v_4 是割顶。

定理 5 **若** u **是连通图** G **的割顶，**G **经过** DFS **后，**$k(u)>1$，**则存在父子边** $e=uv$，**使得** $l(v)\geqslant k(u)$。

证 因 u 的割顶，设 $V-\{u\}$ 划分成 $V_1,V_2,\cdots,V_m$，$G[V_i]$ 是 $G-u$ 的连通片，$i=1,2,\cdots,m(\geqslant 2)$，则当 $i\neq j$ 时，在 G 上从 V_i 到 V_j 的一切轨皆含 u；又 $k(u)>1$，u 不是有向生成树的根，不妨设 $r\in V_1$，r 是根，在 DFS 过程中，活动中心必然要通过

u，设 uv 是 $v\in V_1$ 的第一条父子边，设 $v\in V_2$，因无连通 V_2 与 $V-(V_2\cup\{u\})$ 之间的边，故 $l(v)\geq k(u)$。**证毕**。

定理 6 r **是** DFS **过程中生成树的根，** r **是图** G **的割顶的充要条件是至少有两条以** r **为尾的父子边。**

证 设 r 是 DFS 的生成树的根，且 r 是 G 的割顶，V_1，V_2，…，V_m 是 $V-\{r\}$ 的一个划分，$G[V_i]$ 是 $G-r$ 的连通片，$i=1,2,\cdots,m$。$i\neq j$ 时，从 V_i 到 V_j 的轨都含 r，这时没有起于边 $rv(v\in V_i)$ 而止于 V_j 中顶的树上有向轨，故至少有两条以 r 为尾的父子边。

设 rv_1，rv_2 是两条父子边，T 是根在 v_1 的子树，由定理 3，无连接 $V(T)$ 与 $V(G)-(V(T)\cup\{r\})$ 之顶的边，又 $V(G)-(V(T)\cup\{r\})\neq\varnothing$，故 r 是 G 的割顶。**证毕**。

求块和割顶的算法：

（1）标一切边未用过，$S=\varnothing$，对每顶 $v\in V(G)$，$k(v)\leftarrow 0$，$i\leftarrow 0$，$v\leftarrow s$。

（2）$i\leftarrow i+1$，$k(v)\leftarrow i$，$l(v)\leftarrow i$，把 v 放入先入后出存储器 S。

（3）若 v 无未用过的关联边，转（5）。

（4）选一未用过的边 $e=vu$，标志 e 用过了，若 $k(u)\neq 0$，令

$$l(v)\leftarrow\min\{l(v),k(u)\},$$

转（3）；否则（$k(u)=0$），令 $f(u)\leftarrow v$，$v\leftarrow u$，转（2）。

（5）若 $k(f(v))=1$，转（9）。

（6）（$f(v)\neq s$）若 $l(v)<k(f(v))$，则

$$l(f(v))\leftarrow\min\{l(f(v)),\ l(v)\},$$

转（8）。

（7）（$l(v)\geq k(f(v))$）$f(v)$ 是割顶。把 S 中包括 v 在内的 v 上部之顶移出，这些顶连同 $f(v)$ 导出一个块。

（8）$v\leftarrow f(v)$，转（3）。

（9）把S中连同v在内v上方之顶移出，这些顶连同s导出一个块。

（10）若s无未用过的关联边，止。

（11）顶s是割顶。令$v \leftarrow s$，转（4）。

上述算法的时间复杂度是$O(|E|)$。

这个算法能把连通图G的一切割顶和块找到。

6.1.4 有向图的DFS

有向图的DFS算法：

（1）标志每条边未用过，对每个顶$v \in V(G)$，$k(v) \leftarrow 0$，$i \leftarrow 0$，$f(v)$未定，$v \leftarrow s$（$s \in V(G)$，是搜索的出发点）。

（2）$i \leftarrow i+1$，$k(v) \leftarrow i$。

（3）若无以v为尾的未用过的边，转（5）。

（4）选一条未用过的边$e=vu$，标志e已用过。若$k(u) \neq 0$，转（3）；若$k(u)=0$，$f(u) \leftarrow v$，$v \leftarrow u$，转（2）。

（5）若$f(v)$已确定，$v \leftarrow f(v)$，转（3）。

（6）若$f(v)$未确定，选顶u满足$k(u)=0$，$v \leftarrow u$，转（2）。

（7）止（所有顶皆被搜索）。（图6.5.）

上述算法的时间复杂度为$O(|E|)$。

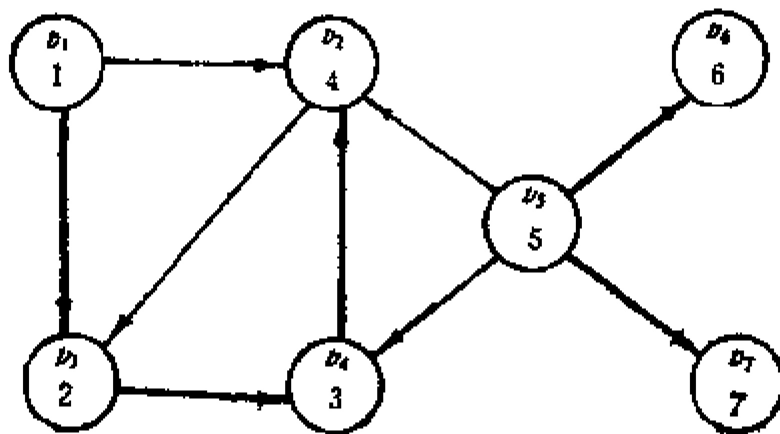


图 6.5

有向图经 DFS 后，边划分成四类：

（1）**父子边** 导出G的生成林。

（2）**返祖边** 后代通向祖先之边。

（3）**前进边** 祖先通向后代孙之边。

（4）**横跨边** 生成林之间的边。

例如图 6.5 中，$v_1v_3, v_3v_4, v_4v_2, v_5v_6, v_5v_7$ 为父子边，生成林用粗实线表示；v_2v_3 是返祖边；v_1v_4 是前进边；v_5v_2, v_5v_4 是横跨边。

6.1.5 求极大强连通子图的算法

在有向图G中，$x, y \in V(G)$，且存在有向轨 $P(x, y)$ 时，叫做x可达y；若x可达y，y可达x，则记成$x \sim y$。"$\sim$"是一种等价关系，即"$\sim$"是自反的，对称的和可传递的关系。我们用"$\sim$"把$V(G)$划分成若干等价类，每一等价类之导出子图叫做G的极大强连通子图。

求极大强连通子图的算法：

（1）标志一切边未用过，对每一顶$v \in V(G)$，$k(v) \leftarrow 0$，$f(v)$未定，$S = \varnothing$，$i \leftarrow 0$，活动中心$v \leftarrow s(s \in V(G))$。

（2）$i \leftarrow i+1, k(v) \leftarrow i, l(v) \leftarrow i$，把$v$放入$S$。

（3）若无以v为尾的未用过之边，转（7）。

（4）选一未用过的边$e = vu$，标志e用过了，若$k(u) = 0$，则$f(u) \leftarrow v$，$v \leftarrow u$，转（2）。

（5）若$k(u) > k(v)$（$e = vu$是前进边），转（3）；若$k(u) < k(v)$，$u \notin S$，转（3）。

（6）$k(u) < k(v)$，$u \in S$，令

$l(v) \leftarrow \min\{l(v), k(u)\}$，转（3）。

（7）若$l(v) = k(v)$，则下至v的S中之顶全部移出，它们导出一个极大强连通子图。

（8）若$f(v)$已确定，则

$l(f(v)) \leftarrow \min\{l(f(v)), l(z)\}$, $v \leftarrow f(v)$ 转（3）.

（9）$f(v)$ 未定，若存在 $u \in V(G)$，$k(u)=0$,则 $v \leftarrow u$，转（2）.

（10）止（一切顶被搜索）.

上述算法之时间复杂度是 $O(|E|)$.

6.2 平面嵌入算法

Kuratowsky 定理给出图为平面图的充要条件，但要检验G中究竟有无 K_5 与 $K_{3,3}$ 的同胚图，我们并无良策。本节给出一个平面嵌入算法，算法终止时，得到了平面嵌入者，自然为平面图，否则为非平面图。这个算法是有效算法，不但是一种平面性判定，而且当图是平面图时，给出绘制一种嵌入图的程序。我们这里介绍的是 1966 年 Lempel，Even 和 Cederbaum 给出的所谓**“顶点添加平面嵌入法”**.

6.2.1 st 编码

因为G为平面图的充要条件是G的块皆平面图，不妨认为图G是一个块来考虑其平面嵌入问题。

取 $e=st \in E(G)$，称满足下列条件的一一映射 g 为**面的st编码**：

$$g: V(G) \to \{1,2,\cdots,\nu\},$$

使得

（1）$g(s)=1$；（2）$g(t)=\nu$；（3）$v \in V(G)-\{s,t\}$，则存在 v 的两个邻顶 u 与 w，有

$$g(u)<g(v)<g(w).$$

是否任意的图（块）都有 st 编码？如果有，如何编？为此首先建立一个**寻路算法**(Path finding algorithm)，代号 PFA.

PFA **算法**：

（0）对G执行 DFS，且取 $k(t)=1$，$k(s)=2$（即 t 是 DFS 之出发点，s是 t 的儿子），把顶s,t 及边ts标成“老的”，其余边顶皆标成“新的”

（1）若 $v\in V(G)$，存在新的返回边 $e=vw$，$(k(w)<k(v))$ 则标 e 为老的，得路 vw，止。

（2）若存在新的父子边 $e=vw(k(w)>k(v))$，从 e 开始，追踪定义 $l(w)$ 的路（沿父子边前进，通过一条返回边在一顶 u 处结束，其中 $k(u)=l(w)$）。把此路上的一切顶与边标成老的，止。

（3）若存在新的返回边 $e=wv$ $(k(w)>k(v))$，则从 e 及父子边逆行直至一个老顶，此路上的一切顶与边标以老的，止。

（4）一切与 v 关联的边皆老的，产生空路，止。

上述算法时间复杂度是$O(|E|)$。

定理 7　寻路算法总从老顶 v 开始，$v\neq t$，则老顶之祖先也是老的。

证　用归纳法来证、若 $v=s$，s之祖先是 t，t 是老的，命题成立。假设已进行了 p 次寻路，每次皆从老顶出发，且老顶之祖先皆老顶。考虑 $p+1$ 次寻路之后，从寻路的四个步骤可以看出，其中任何一条执行时，命题结论仍正确。**证毕。**

定理 8　G是块，从老顶 v 出发（$v\neq t$）寻路，则每次产生一个过新边新顶的路，此路止于另一个老顶，或是 v 的一切关联边皆为老的，产生空路。

证　只需考查寻路算法中的（2）。因G是块，v 非割顶，则 $l(w)<k(v)$，故（2）寻路之终止点 u 是v之祖先，由于v是老的，由定理 7，所以 u 也是老的。**证毕。**

***st* 编码算法：**

（1）$i\leftarrow 1$，$s,t\in S$，s在 t 之上方。

（2）若 v 在S之顶部，把 v 从S中移出，若 $v=t$，$g(t)\leftarrow i$，止。

（3）若$v \neq t$，对v执行寻路算法，若从v始寻到的是空路，则$g(v) \leftarrow i$，$i \leftarrow i+1$，转（2）。

（4）若得的路非空，设它是$vu_1, u_2 \cdots u_l w$，按$u_l, u_{l-1}, \cdots, u_2, u_1, v$的顺序把它们放入$S$，转（2）。

上述算法的时间复杂度是$O(|E|)$。

定理 9　st 编码算法给出一个 st 编码.

证　我们从算法发现三个事实：

（i）没有一个顶同时出现在S的两个或更多的位置上。

（ii）一旦v出现在S中，S中在v下方的顶直到v得到编码前是不会得到编码的.

（iii）仅当与v关联的边皆"老的"时，此顶才从S中移出，不再进入S。

下面来证t被移出S之前，每个顶都会被放入S。因为开始时t与s已在S中，我们只考虑$v \neq s$，t，因G是块，则从s到v有一条不过t的轨。设此轨为$su_2u_3\cdots u_{l-1}v$，且u_m是未放入S的第一个顶，这里$s=u_1, v=u_l$。因u_{m-1}放入了S，由(ii)，t只能在u_{m-1}之后被移出；且由（iii），u_{m-1}被移出，只能在与之关联的一切边皆老之后，所以u_m必于t被移出前放入S。

下面证明得到的是st编码。

因为每顶放入S后，终于要被移出，所以每顶得一编码$g(v)$。显然$g(s)=1$，因为s是第一个被移出者。以后的赋值是递增的，故$g(t)=v$。其它顶第一次放入S时，是做为一路之内顶，故在S中，此顶下方还有一个在G中相邻的顶，上方也有一顶是此顶在G中的邻顶。由(ii)，在此顶上方的那个顶编号小，此顶下方的那个顶的编号大，故g是一个st编码．**证毕.**

6.2.2　顶点添加平面嵌入算法

设G是块，已被st编码，我们用顶点的st码来称呼该顶。$V=\{1,2,\cdots,v\}$。我们把G定向，使每有向边满足尾小于头，

于是：

（1）$d^-(1)=0$，1是唯一的“源”，只出不入。

（2）$d^+(\nu)=0$，ν是唯一的“坑”，只入不出。

（3）$v\in\{2,3,\cdots,\nu-1\}$，$d^+(v)\cdot d^-(v)\neq 0$，v非源非坑，有进有出。

记G'是平面图G之平面嵌入，$G_k=G[\{1,2,\cdots,k\}]$。

引理 1 设G'_k是含于G'中的G_k之平面嵌入，则$G'-V(G'_k)$的一切顶与边皆嵌在G'_k的一个面内部，其中$k<\nu$。

证 $G'-V(G'_k)$的顶集非空，而$V(G'-V(G'_k))\cap V(G'_k)=\varnothing$，所以存在$G'_k$的一个面$f$，$f$内部含$G'-V(G'_k)$的若干个顶。又因$f$的边界上的顶皆小于$f$内部的顶（$f$内之顶是$V(G'-V(G'_k))$中的，都比$k$大），于是$f$内的最大的顶必为坑。不然，有一边以它为尾，此边之头是比尾更大的顶，此头不在f内，必在f的边界上，而f上的顶属于G'_k，都不大于k，矛盾。又G只有一个坑。所以f内部含有$G'-V(G'_k)$的一切顶与边，不然，在G'_k的另一个面f'内仍有$G'-V(G'_k)$的顶，于是同理得知f'内亦有坑，与坑的唯一性相违。**证毕。**

由引理1，我们可以把$G'-V(G'_k)$的边与顶嵌在G'_k的外面内。

我们如下地生长一个**灌木**B_k：把G_k的顶按st号码放在从第一层到第ν层的水平线上，再画上边，实现G_k的平面嵌入G'_k。再从G'_k的顶出发不交叉地画出进入$V(G)-V(G_k)$的一切边，不过这些边的头画在最高层的水平线上，其中两条边有同一个头时，也画成两个头。再把这些头标志以在G中的st编码。这时，可能有几个在最高层的顶有相同的号码，它们在G中本来是同一个顶。

我们把上述最高层的顶叫做**虚拟顶**，以虚拟顶为头的边叫**虚拟边**（图6.6与图6.7）。

若B_k的$k+1$号虚拟顶连贯地出现在最高层，我们把这些

$k+1$号虚拟顶重合成一个顶，保持其关联的边不交叉，并把此顶从第v层拉下来，放在第$k+1$层上，再把从$k+1$号顶出发的虚拟边与虚拟顶画好，得到灌木B_{k+1}。这一过程若总能进行，则可得灌木B_n，即得到了G的平面嵌入。

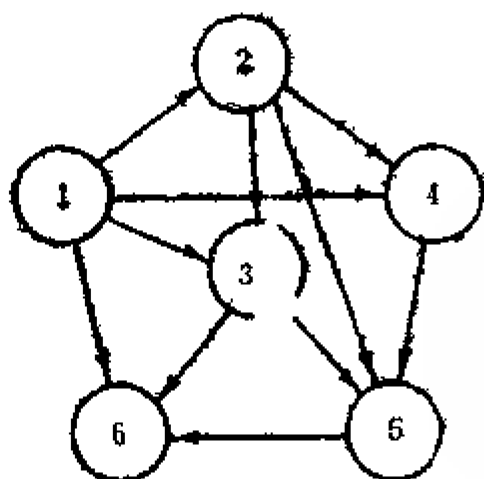


图 6.6

问题在于要有办法解决虚拟顶上同一号码在第v层水平线上不连贯出现的情形。为此我们讨论图（未必是块）的元件概念。

在$G-v$中取一连通片G_i，$G[V(G_i)\cup\{v\}]$叫做G的关于v的一个**元件**。

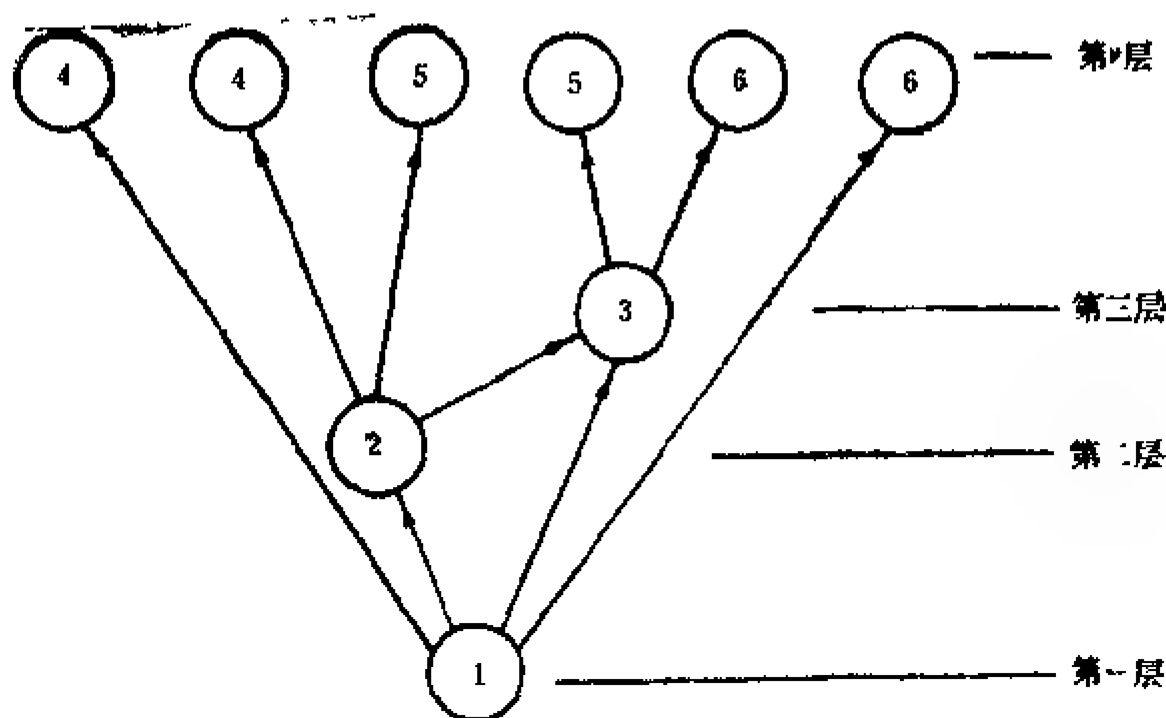


图 6.7

引理 2 **设v是B_k的一个割顶，$v>1$，则恰有B_k的关于v的一个元件，含有比v小的顶。**

证 由st码之定义，任取$u\in V(B_k)$，$1\leqslant u<v$，不妨设$u>1$，存在$u_1<u$，$u_1u\in E(B_k)$；存在$u_2<u_1$，$u_2u_1\in E(B_k)$；

…，于是找到了一条从1到u但不超过v的道路。即一切比v小的顶在B_k-v的同一个连通片上，于是$v>1$时，恰有一个元件含比v小的顶。**证毕**。

引理2的意思是，若v是B_k的割顶，除去含1的那个关于v的元件，其它关于v的元件中，v都是最小顶、而这些以v为最小（低）的顶的每个元件又是以v为根的子灌木，每个子灌木可以以v为根翻转180°（我们约定根在最下方）或者把同根的灌木们位置进行置换，以期$k+1$号虚拟顶在最高层连贯地出现。（图6.8）。

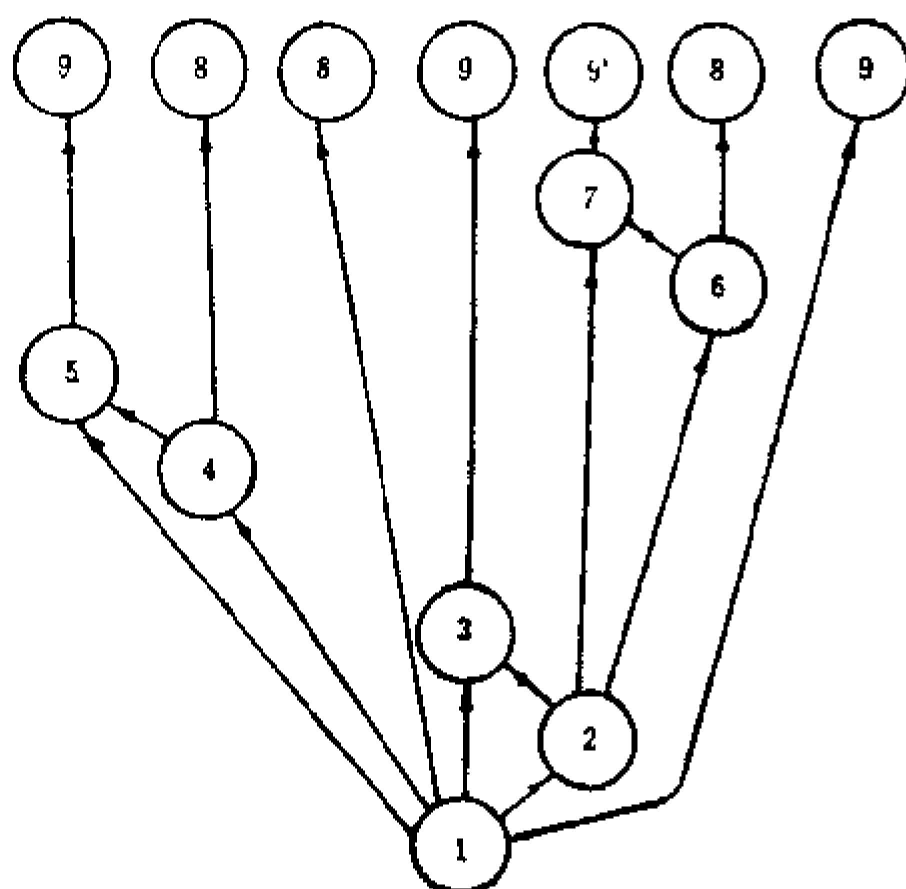


图 6.8

在图6.8中画的是一个B_7，我们可以如下地施行翻转与置换，使最高层8号连贯：1与8导出的元件与1与9导出的元件对换；再把1，4，5，8，9导出的元件翻转，轮换到最右侧，则会出现最高层的排列9，9，9，8，8，8，9，于是8号连

贯出现。

引理 3　设H是B_k的块，$V(H)\supseteq\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，$y_1,y_2,\cdots,y_m$又是$B_k-E(H)$中边之端点，则所有的$y_1,y_2,\cdots,y_m$在$B_k$的每一种平面嵌入形成的灌木$B'_k$中都在$H$的平面嵌入$H'$的外面边界上，且面序相同（可以是顺时针也可以是逆时针排列）。

证　设在B'_k中，H的嵌入为H'，则$y_1,y_2,\cdots,y_m$是$B'_k-E(H')$的边之端点，所以$y_1,y_2,\cdots,y_m$在H'的外面边界上是显然的。

设B'_k,B''_k是G的两个不同方式画出的灌木，H是其中的块，H的嵌入分别为H'，H''。若y_i,y_j在H'的外边界上相邻，但在H''外边界上不相邻，则H''的外边界上有另外两个顶y_k，y_l，它们隔离了y_i,y_j。在H'中有两条轨$P_1(y_i,y_j)$与$P_2(y_k,y_l)$，它们无公共顶点，但在H''中这样的两条轨不存在，矛盾。所以B_k不同的画法不影响$y_1,y_2,\cdots,y_m$在H的嵌入中在外边界上的相邻关系。**证毕。**

定理 10　设B'_k与B''_k是G_k的两个面木，则存在有限个B'_k的元件的翻转与置换，使得B'_k变成B'''_k，且B'''_k与B''_k中虚拟顶出现的次序一致。

证　对顶数进行归纳证明。

若B'_k与B''_k只有两个顶，命题自然成立。

假设对顶数$\leqslant p-1$的灌木B'_k与B''_k定理已成立，考虑顶数为p的两个灌木B'_k,B''_k，令$v-1$（根）。

（i）若v是B'_k与B''_k的割顶，我们把关于v的元件（子灌木）排列得顺序一致，由归纳法假设，B'_k中的每一以v为根的子灌木可以通过有限次元件翻转与置换而使其虚拟顶的排列与B''_k中相应的子灌木一致。从而定理成立。

（ii）若v不是B'_k与B''_k的割顶，设H是含v的块，在B'_k与B''_k中，H的嵌入分别是H'与H''。设$\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$是H

之顶集的子集，且 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 都是 $E(B'_k)-E(H')$ 中边之端点，由引理3，$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 都出现在 H' 与 H'' 的外面边界上。若绕行顺序相反，则可把 B'_k 翻转而使 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 按同一绕行方向在 H' 与 H'' 的外边界上顺序一致。由引理2，每个 $y_i(i=1,2,\cdots,m)$ 皆为某个子灌木之根，且这些子灌木在 B'_k 与 B''_k 中的出现次序，由引理3，可以经置换变得一致。又由归纳法假设，每个上述的子灌木可经有限次翻转与置换，使相应的子灌木上的虚拟顶出现的次序一致，进而 B'_k 与 B''_k 的虚拟顶出现的次序一致。**证毕**。

由引理1知，我们把 G 嵌入平面时，可以把 $G'-V(G'_k)$ 的边与顶嵌在 G'_k 的外面内，所以存在一种 B_k，使得 $k+1$ 号虚拟顶在最高层连贯出现；倘若我们在画灌木 B_k 时，最高层上 $k+1$ 号虚拟顶未能连贯出现，由定理10，我们总可以通过元件的翻转与置换而使其 $k+1$ 号虚拟顶在最高层连贯出现，进而得到 B_{k+1}，$B_{k+2}, \cdots, B_{\nu-1}$，最后得到 G'。

本章我们介绍了图论中的三个基本算法，尤其是DFS算法，应当领会它的"走一步是一步，走不通时则倒退"的摸索精神。它的优点在于无需知道图的整体结构，即可把图遍历，而且还能得到生成树和有向图的生成林。DFS是很多图论算法的基础，例如本章讲的 st 编码。

平面图的平面嵌入算法不止一种，我们这里介绍的顶点添加算法是其中最直观最生动的方法之一，它用生长灌木的形象来进行，通俗易懂，便于掌握。而且，当这一算法不能实现平面嵌入时，我们便判定图是非平面图。

习　题

1　证明DFS得到的生成树上，一个团的一切顶必出现在一条有向道路上；它们是否连贯地出现？论证你的回答。

2 设G是连通图，

(a) 顶$u\neq s$是割顶的充要条件是当G上DFS终止时，存在父子边uv，不存在返回边xy，使得x是v的后代，y是u的祖先。

(b) 设计一个时间复杂度为$O(|E|)$的求割顶的算法，且能产生块。

3 C是有向图上的有向圈，执行DFS时，v是C上$k(v)$最小者，则v是DFS所得生成林中一个子树之根，且C的一切顶皆在此子树上。

4. 设计一个求桥的算法，

5. 用顶点添加嵌入法讨论Petersen图是否平面图.

6. 用顶点添加算法把下面的图6.9嵌入平面.

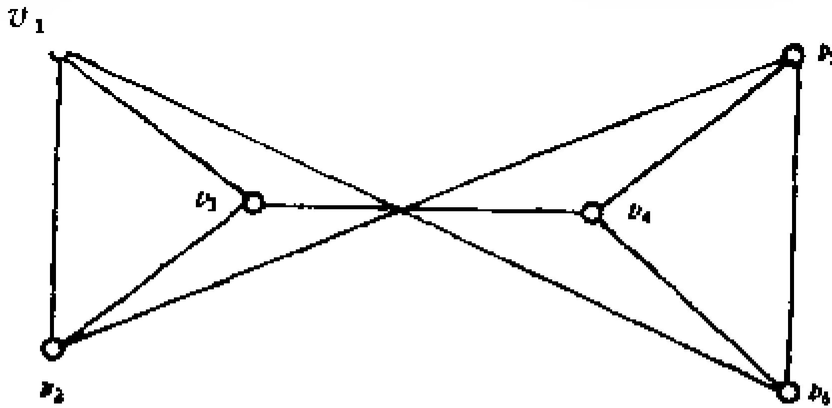
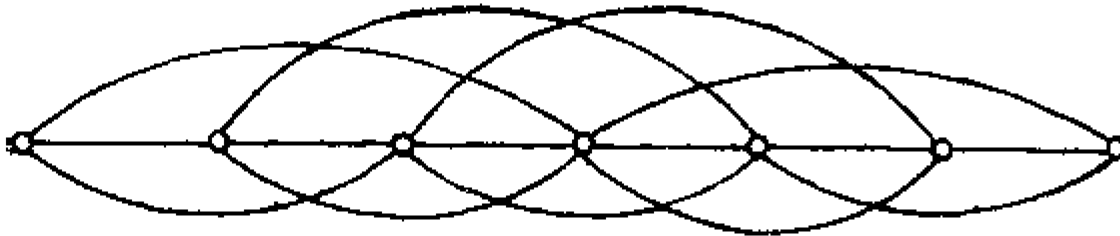


图 6.9

7. 图6.10是否平面图？用顶点添加算法讨论之.


图 6.10

7 匹配理论及其应用

7.1 匹配与许配

让我们从一个古典问题谈起，这个问题就是组合数学当中著名的**婚配问题**：某团体有若干未婚的姑娘和小伙子，所有的姑娘都已到结婚年龄。如果没有另外的条件限制，为了满足姑娘们的愿望，唯一的必备条件是，可供选择的小伙子至少要和姑娘一样多。但每个姑娘都不会草率处理终身大事，她们往往会排除一些小伙子作为她的可能的配偶，于是，实际上有一个她认为是可以接受的配偶的名单。问：

（1）这个团体里的每个姑娘是否都可以与她自己认可的小伙子结婚？

显然这并非永远可以，因为或许有三位姑娘，她们手头上的名单都只列出两个小伙子，而且三张名单竟完全一样！既然并非永远可行，那么，问：

（2）在什么条件下可以满足每位姑娘的心愿？当这种条件不具备时，又问：

（3）最多有几位姑娘的愿望会得以满足？

（4）如何匹配，才会使婚后这个团体的家庭最为美满？

提请读者注意，这里讲的不是笑话或游戏，这四个问题十分典型，事实上，有很多实际问题，它的数学模型与上述婚配问题的数学模型是一样的，为了解决诸如此类的问题，发展了一整套数学理论和有效算法。这些，正是本章所要研究的内容。本章仍研究无向单图。

定义 1 $M\subseteq E(G)$，$\forall e_i$，$e_j\in M$，e_i，e_j **不相邻，则称**M

是图G中的一个匹配；M中的一条边之两个端点叫做在M之下相配；M中的每个端点称为被M许配；G中每个顶皆被M许配时，M称为完备匹配；G中已无匹配M'，使得$|M'|>|M|$，则称M为最大匹配.

图 7.1(a) 的粗实线表示一个最大匹配，(b) 中粗实线表示一个完备匹配（当然是最大匹配）.

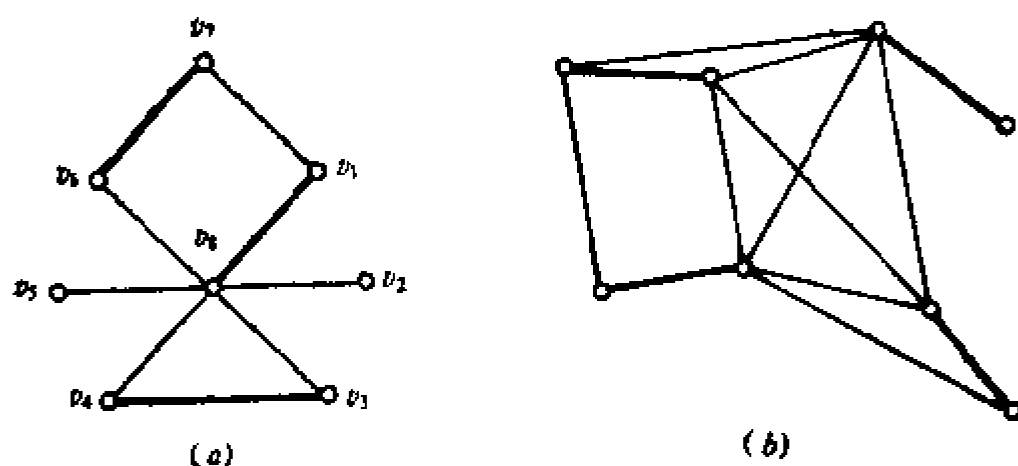


图 7.1

例 1 Bernoulli-Euler 错放信笺问题：

某人给六个人各写了一封信，准备了六个写有收信人地址的信封，问有多少种投放信笺的可能，使每份信笺与信封上收信人不相符？

解 设信笺为x_i，信封为y_i，$i=1,2,3,4,5,6$. x_i与y_i是相符的，于是问题转化为求图 7.2 中的图G有多少不同的完备匹配，我们把这个数目记成$\varphi(6)$.

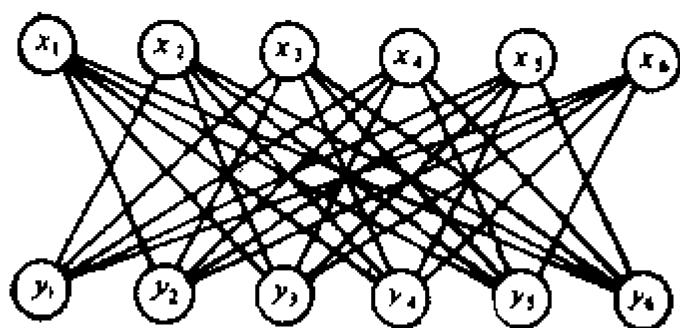


图 7.2

x_1与y_2相配时，完备匹配的个数等于从图G中删除顶x_1与y_2后所得的图$G_{x_1y_2}$中完备匹配的个数，这个数记成$\psi(5)$。在$G_{x_1y_2}$中，若x_2与y_1相配，则$\psi(5)=\varphi(4)$；若x_2不与y_1相配，则$\psi(5)=\varphi(5)$。于是G中x_1与y_2相配时，可得$\varphi(5)+\varphi(4)$个完备匹配；同理，x_1与$y_j(3\leqslant j\leqslant 6)$相配时，亦有$\varphi(5)+\varphi(4)$个完备匹配，故$\varphi(6)=5[\varphi(5)+\varphi(4)]$；同理可得$\varphi(5)=4[\varphi(4)+\varphi(3)]$，$\varphi(4)=3[\varphi(3)+\varphi(2)]$，$\varphi(3)=2[\varphi(2)+\varphi(1)]$，而$\varphi(2)=1$，$\varphi(1)=0$，故得$\varphi(6)=265$，即可能有265种投放错误。

一般地，有递推公式（n封信）：

$$\varphi(n)=(n-1)[\varphi(n-1)+\varphi(n-2)],\quad \varphi(2)=1.$$

定义 2 **M是G上的匹配，G中有一轨，其边交替地在$E-M$和M中出现，则称此轨为G中M的交错轨。若M的交错轨的起止顶皆未被M许配，则称此轨为M的可增广轨。**

图7.3中$v_1v_2v_3v_4$是可增广轨，其中$M_1=\{v_2v_3\}$是一个匹配，我们可以取新的匹配$M_2=\{v_1v_2, v_3v_4\}$，使$|M_2|>|M_1|$。这正是增广的含义，即可以把可增广轨上不在匹配中的边放入匹配中，而把原属于匹配的边从匹配中去掉，得到的新匹配比原来的匹配边数增大1。

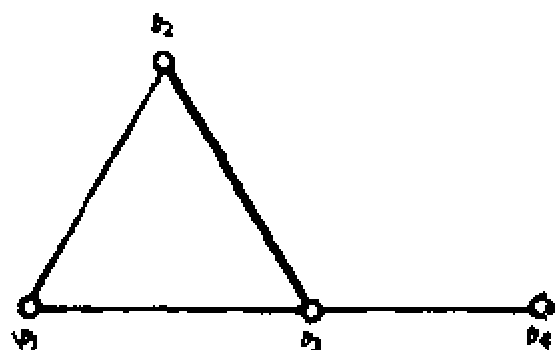


图 7.3

7.2 匹配基本定理

我们把A与B两个集合的对称差记成$A\ominus B$，定义$A\ominus B=(A\cup B)-(A\cap B)$，显然$A\ominus B=B\ominus A$，故名**对称差**。符号$\ominus$也可写成$\oplus$。

下面是 Berge, Hall, König 和 Tutte 的四个著名定理。

定理 1 (Berge, 1957) **M是G的最大匹配的充要条件是G中无M的可增广轨。**

证 设M是G的最大匹配，但G有一个可增广轨，则可以把M的边数增加1，与M是最大匹配矛盾，故这时G中无M的可增广轨。

下面证充分性。已知 G 内不含匹配 M 的可增广轨，要证M是最大匹配。若M不是最大匹配，则存在另一匹配 M'，$|M'|>|M|$。令

$$H=G[M\ominus M'],$$

则H中顶的次数非1则2，因为H的顶至多与M的一条边，M'的一条边相关联，又不会有零次顶。故H的连通片，或是M与M'的边交错出现的一个偶圈，或是M与M'的边交错出现的一条轨，又因$|M'|>|M|$，故H中的边M'中的比M中的多，所以，必有H的某个连通片是轨，且此轨以M'的边为起止边，于是得到了M的可增广轨，与G中无M的可增广轨矛盾。**证毕。**

定义 3 $A\subseteq V(G)$，$V(G)$ **中与**A**中顶相邻的顶所成之集合记成**$N(A)$，**叫做**A**的邻集。**

定理 2 (Hall, 1935) **G是二分图，顶集划分成X与Y，G中存在把X中顶皆许配的匹配之充要条件是，对一切$S\subseteq X$，$|N(S)|\geqslant|S|$。**

证

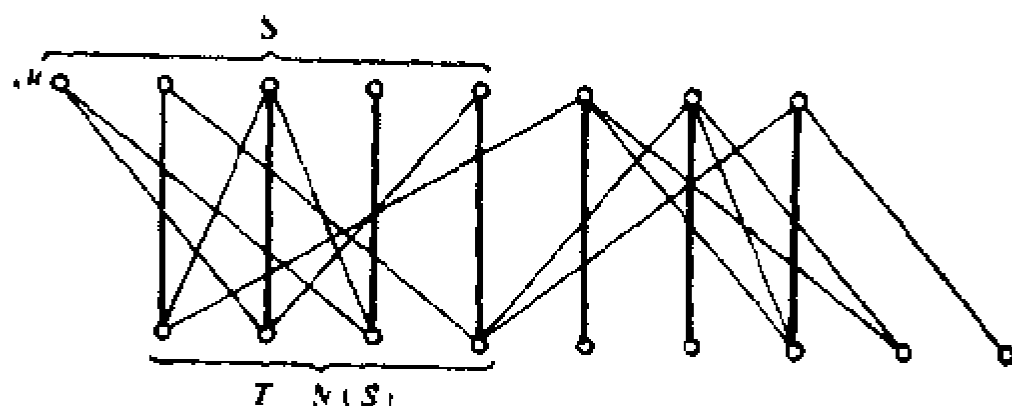


图 7.4

设G中含把X中每顶皆许配的匹配M，且令S是X的子集，则S中各顶亦被许配，故$|N(S)|\geqslant|S|$。

反之，若一切$S\subset X$，有$|N(S)|\geqslant|S|$，但G中没有把X中顶皆许配的匹配. 设M^*是G的一个最大匹配，M^*也不能把X中的顶都许配，令u是一个X中未被M^*许配的顶（图 7.4），又令Z是被M^*的交错轨与u相连通的顶点集合；因M^*是最大匹配，由 Berge 定理，u是Z中仅有的未被M^*许配的顶。取

$$S=Z\cap X,\quad T=Z\cap Y.$$

显然，$S-\{u\}$中的顶在M^*中与T中的顶相配，于是

$$|T|=|S|-1,\quad N(S)=T,$$

故得

$$|S|=|N(S)|+1,$$

与$|N(S)|\geqslant|S|$矛盾. **证毕.**

推论 1　G是k次正则 2 分图，$k>0$，则G有完备匹配.

证　设G之顶的二分图划分为X、Y，则$k|X|=\varepsilon=k|Y|$，$k>0$，故$|X|=|Y|$. 令S是X中任一非空子集，E_1与E_2分别表示与S及$N(S)$中顶相关联的边集. 由$N(S)$之定义，$E_1\subseteq E_2$，故

$$k|N(S)|=|E_2|\geqslant|E_1|=k|S|,$$

于是$|N(S)|\geqslant|S|$，由 Hall 定理，G中有把X中顶皆许配的匹配M，又因$|X|=|Y|$，故M为完备匹配，**证毕.**

定义 4　$K\subset V(G)$，且G的每一边至少有一个端点属于K，则称K是图G的一个覆盖. 若K是一个覆盖，$\forall v\in K$，$K-\{v\}$不是覆盖，则称K为极小覆盖. 若K为覆盖，但已无覆盖K'，使得$|K'|<|K|$，则称K为最小覆盖. 用$\alpha(G)$表示G中最小覆盖之顶数，$\alpha(G)$称为G的覆盖数.

例如图 7.5 中的黑色顶是一个极小覆盖，同时也是一个最小覆盖，$\alpha(G)=4$. 这里覆盖一词的含义是顶覆盖全体边，即K是覆盖，则$G-K$为无边图. 任意一个匹配M，都满足

$\alpha(G) \geqslant |M|$.

定理 3 (König, 1931) **在二分图中，若 M^* 是最大匹配，K 是最小覆盖，则 $|M^*| = |K| = \alpha(G)$。**

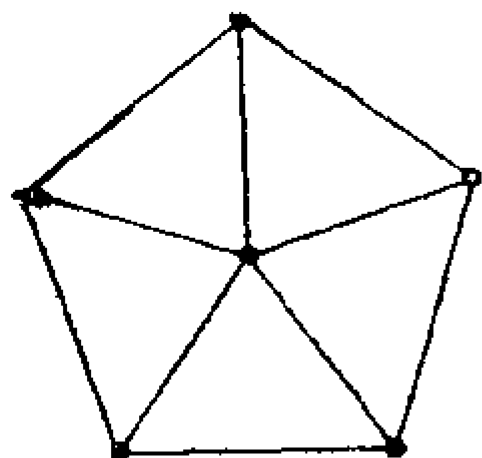


图 7.5

证 设M^*是二分图G中的最大匹配，$V(G)$的二分图划分为X与Y，若M^*把X中一切顶皆许配，则$|M^*| = |X|$；这时，显然X是一个最小覆盖，故$|M^*| = \alpha(G)$。

若存在未被M^*许配的顶，令U是X中未被M^*许配的顶之集合（图7.6），Z是由M^*的交错轨与U中顶相连通的顶之集合，且令$S = Z \cap X$，$T = Z \cap Y$，则$N(S) = T$。又令$\bar{K} = (X - S) \cup T$，则G的每一边至少有一端在$\bar{K}$中，不然，将会有一边，一端在S中，另一端在中$Y - T$中，这与$N(S) = T$矛盾，故$\bar{K}$是G的

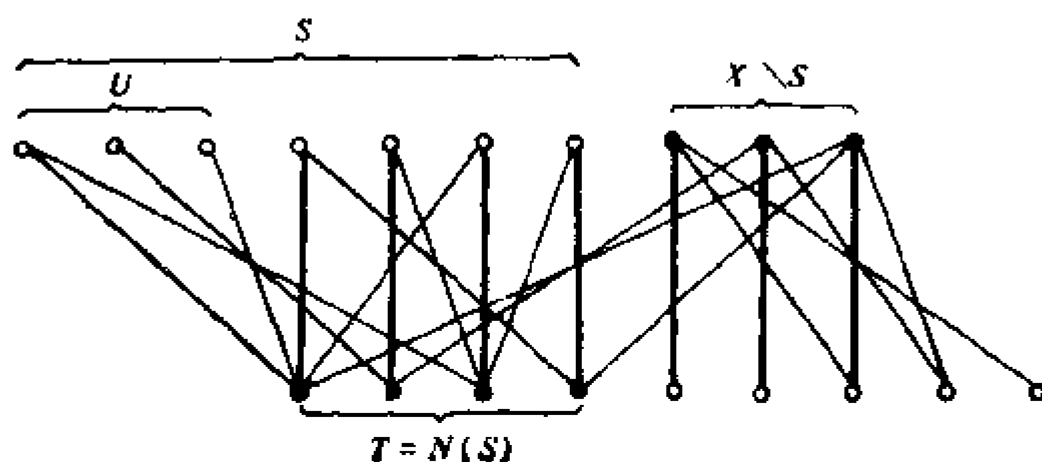


图 7.6

一个覆盖，且显然有$|M^*| = |\bar{K}|$。而任一个匹配M，都有$|M| \leqslant \alpha(G)$，故$|M^*| \leqslant \alpha(G)$，于是$|\bar{K}| \leqslant \alpha(G)$，故$\bar{K}$是最小覆盖。**证毕。**

刻画完备匹配的一个非常深刻的成果归功于 Tutte，用它来

否定一个图存在完备匹配很方便。

定义 5 **图的顶数为奇数的连通片叫做奇片，顶数为偶数的连通片叫数偶片，$o(G)$ 表示G中奇片的个数。**

定理 4（Tutte, 1947）**图G有完备匹配的充要条件是对一切** $S\subset V$，$o(G-S)\leqslant|S|$。

证 设单图G有完备匹配M。G_1，G_2，…，G_n是$G-S$的奇片，$n\geqslant 0$。显然，当$S=\varnothing$，$o(G-S)=0$，即$n=0$，所以不妨设$S\neq\varnothing$。因G_i，$i=1$，2，…，n是奇片，G_i中的某个顶u_i必然被M许配于S的一个顶v_i，因而$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}\subseteq S$，$o(G-S)=n=|\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}|\leqslant|S|$。

反之，若对一切$S\subset V$，$o(G-S)\leqslant|S|$，但G中无完备匹配，则G是一个没有完备匹配而有最多边的图G^*的生成子图。因$G-S$是G^*-S的生成子图，故$o(G^*-S)\leqslant o(G-S)$，于是

$$o(G^*-S)\leqslant|S|.$$

特别地，取$S=\varnothing$，$o(G^*)=0$，故$\nu(G^*)$是偶数。

用U表示G^*中$\nu-1$次顶之集合，由G^*之定义，$U\neq\varnothing$。若$U=V$，G^*中有完备匹配，于是U是$V(G^*)$的真子集。下面证明G^*-U是不相交的完全图之并。不然，G^*-U的某个连通片不是完全图，则在该连通片之中，存在顶x，y，z，使得xy，$yz\in E(G^*)$，但$xz\bar{\in} E(G^*)$。又$y\bar{\in} U$，存在$w\in V(G^*-U)$，使得$yw\bar{\in} E(G^*)$。因为G^*是没有完备匹配的$|V(G)|$个顶的边数最多的图，对一切$e\in E(G^*)$，G^*+e中有完备匹配。令M_1与M_2分别是G^*+xz与G^*+yw的完备匹配，H为$M_1\ominus M_2$在$G^*+xz+yw$中的导出子图，则H的每顶皆2次，H是不相交偶圈之并，因为它们上面的边是M_1与M_2的边交替出现的。图7.7中黑实线是M_1的边。

情形1 xz和yw在H的不同连通片中。若yw在H的圈C上，那么M_1在C上的边与M_2不在C上的边构成G^*的一个完备匹配，与G^*之定义矛盾，见图7.7。

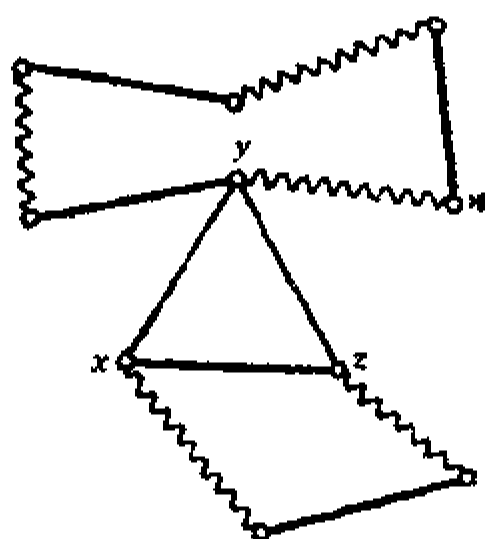


图 7.7

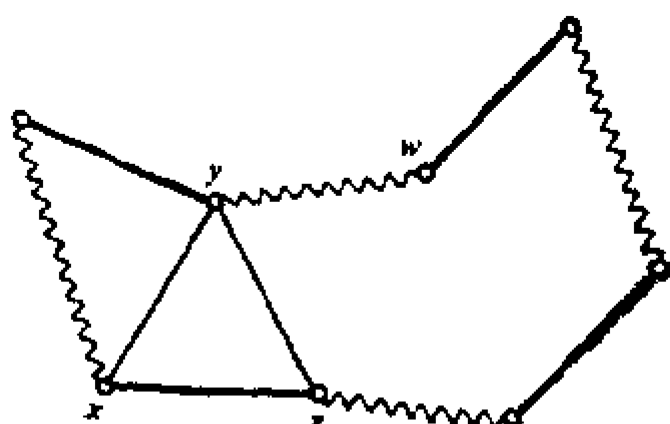


图 7.8

情形2 xz 与 yw 在H的同一个圈C上，见图7.8。这时在C上 $yw\cdots z$ 部分M_1的边与yz及M_2不在$yw\cdots z$部分的边构成G^*的一个完备匹配，矛盾。

综上所述，知 G^*-U 是不相交的完全图之并。

由 $o(G^*-U)\leqslant|U|$，G^*-U 中的奇片至少$|U|$个。但是G^*中有了完备匹配（图7.9），把G^*-U的每奇片中的一个顶许配给U的一个顶，U和G^*-U的连通片中的其余的顶（由于每个G^*-U的连通片皆完全图）可以许配给本连通片中或U中的另一顶，这与G^*中无完备匹配矛盾。**证毕。**

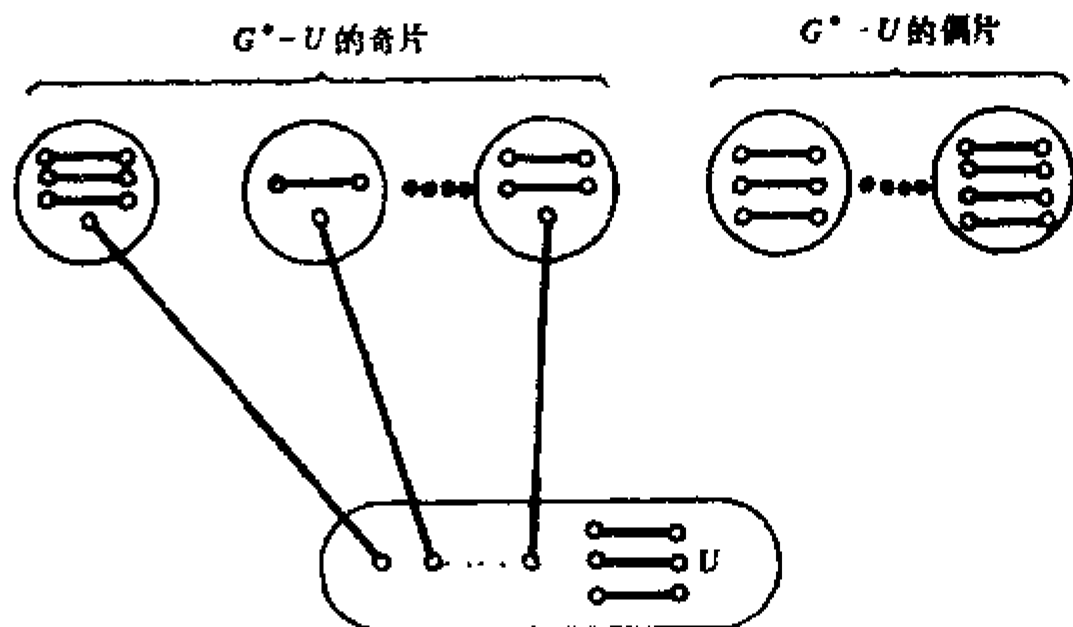


图 7.9

推论 1　每个无桥的三次正则图有完备匹配。

证　令 G 是三次正则图，G 中无桥，S 是 $V(G)$ 的真子集，$G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 $G-S$ 的奇片，m_i 是 G_i 中有一个端点，另一端点在 S 的边之个数，$1\leqslant i\leqslant n$。因 $d(v)=3\,(v\in V(G))$，则

$$\sum_{v\in V(G_i)} d(v) = 3\nu(G_i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{v\in S} d(v) = 3|S|,$$

于是

$$m_i = \sum_{v\in V(G_i)} d(v) - 2\varepsilon(G_i)$$
$$= 3\nu(G_i) - 2\varepsilon(G_i),$$

可见 m_i 是奇数，又无桥，故 $m_i\neq 1$，$m_i\geqslant 3$，$1\leqslant i\leqslant n$。从而

$$o(G-S) = n\leqslant \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant \frac{1}{3}\sum_{v\in S} d(v) = |S|,$$

由 Tutte 定理，G 中有完备匹配。**证毕。**

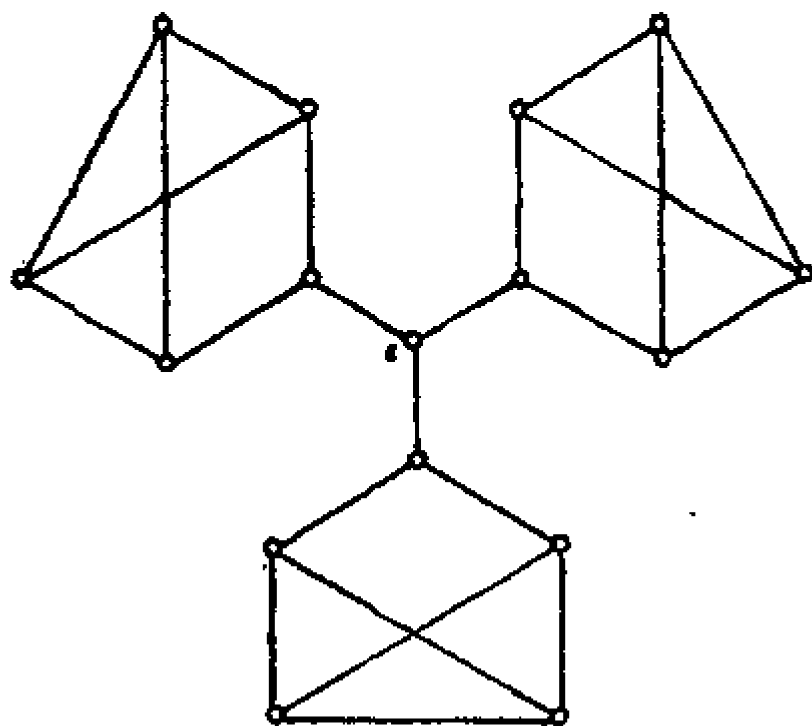


图　7.10

例如一切妖怪图都有完备匹配，而图 7.10 的图虽然是三次正则图，但有桥，不能用推论 1 来判它有完备匹配，事实上，由于$o(G-v)=3$，由 Tutte 定理，它没有完备匹配。

7.3 二分图中最大匹配与最佳匹配的算法

7.3.1 匈牙利算法

分工问题如下：某公司有工作人员 x_1，x_2，…，x_n，他们去做工作 y_1，y_2，…，y_n，每人适合做其中的一项或几项工作，问能否每人都分配一项合适的工作？

这个问题的数学模型是：G是二分图，顶集划分为$X\cup Y=V(G)$，$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，当且仅当$x_i$适合于工作$y_j$时，$x_iy_j\in E(G)$，问$G$中是否有完备匹配？

Edmonds 于 1965 年提出如下的所谓匈牙利算法，解决了这个问题。

匈牙利算法：

（0）从G中取一个初始匹配M。

（1）若M已把X中顶皆许配，止，M即为完备匹配；否则取X中未被M匹配的一顶u，记$S=\{u\}$，$T=\varnothing$。

（2）若$N(S)=T$，止，无完匹备配，否则取 $y\in N(S)-T$。

（3）若y是被M许配的，设$yz\in M$，$S\leftarrow S\cup\{z\}$，$T\leftarrow T\cup\{y\}$，转（2）；否则，取可增广轨$P(u, y)$，令$M\leftarrow M\ominus E(P)$，转（1）。

这个算法的要点是把初始匹配通过可增广轨逐次增广以至得到最大匹配。

例 2 求图 7.11 中的最大匹配。

(a) 取初始匹配$M=\{x_2y_2, x_3y_3, x_5y_5\}$。

(b) 以未被M许配的顶x_1为根，生长外向交错树。结果得到可增广轨$x_1y_2x_2y_1$。

(c) 通过(b)中的可增广轨把M增广成

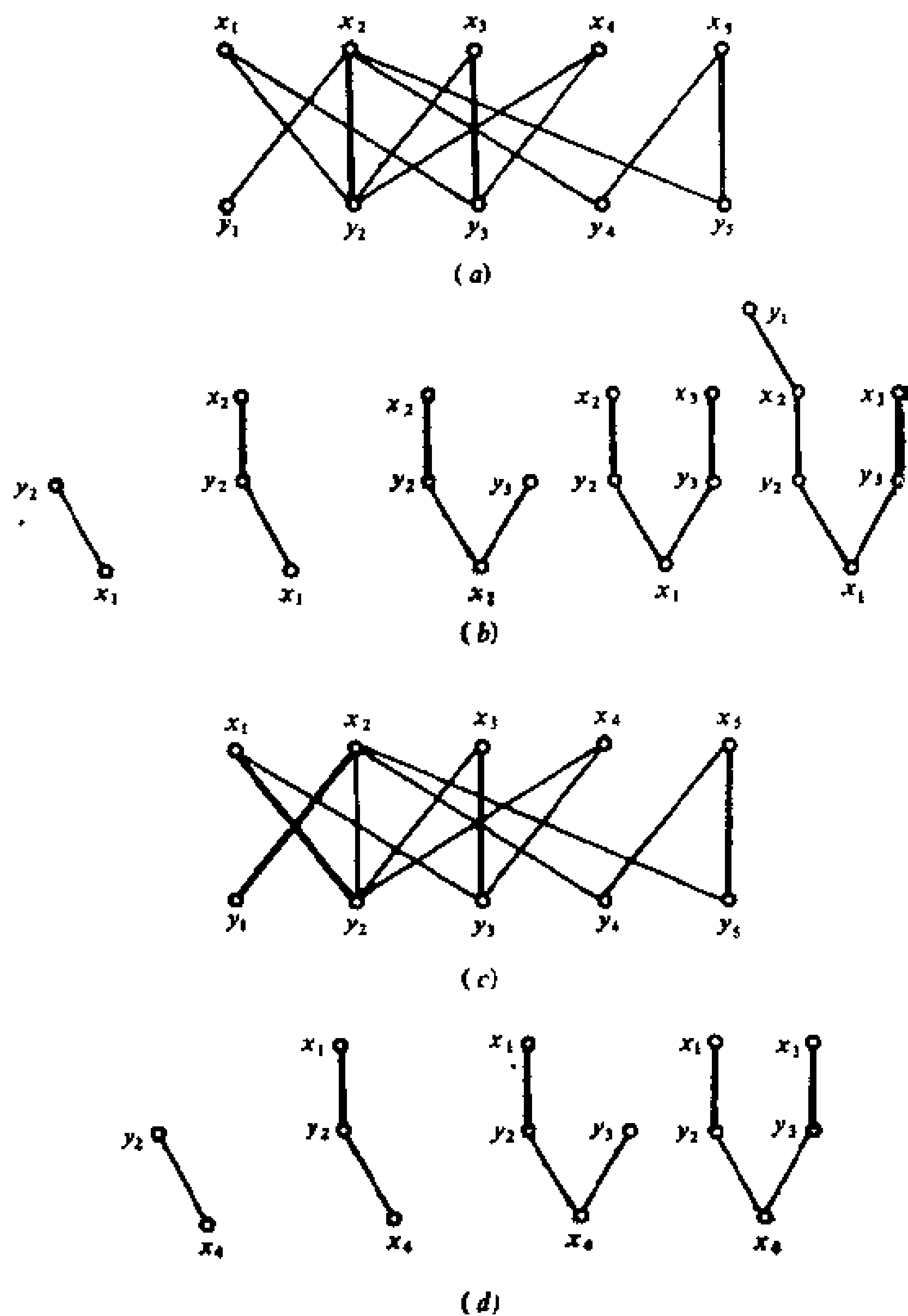


图 7.11

$$M_1=\{x_1y_2,\ x_2y_1,\ x_3y_3,\ x_5y_5\}.$$

(*d*) 以未被M_1许配的顶x_4为根，生长外向交错树，结果未得到可增广轨，可见M_1是最大匹配，无完备匹配。

7.3.2 Kuhn-Munkres 算法

在分工问题中，工作人员可以做的各项工作，效益未必一致，我们需要制定一个分工方案，使公司的总效益最大，这就是所谓**最佳分配问题**。它们数学模型如下：

G是加权完全二分图，$V(G)$的二分图划分为X，Y；$X=\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$w(x_iy_j)\geqslant 0$是工作人员x_i做y_j工作时的效益，求权最大的完备匹配，这种完备匹配称为**最佳匹配**。

若用穷举法，需要对$n!$个完备匹配进行比较，当n较大时，计算量过大，是不可能很快得到结果的。本节给出一种有效算法，为此，我们首先引入一个定义和一个定理，作为本节中心算法的基础。

定义 6 **映射**l：$V(G)\to R$，**满足**：$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$，**成立**

$$l(x)+l(y)\geqslant w(xy),$$

则称$l(v)$**是二分图**G**的可行顶标；令**

$$E_l=\{xy\,|\,xy\in E(G),\ l(x)+l(y)=w(xy)\},$$

称以E_l**为边集的**G**之生成子图为相等子图，记为**G_l。

可行顶标是存在的，例如

$$\begin{cases} l(x)=\max\limits_{y\in Y}w(xy), & x\in X; \\ l(y)=0, & y\in Y. \end{cases}$$

定理 5 G_l**的完备匹配即为**G**的最佳匹配。**

证 设M^*是G_l的一个完备匹配，因G_l是G的生成子图，故M^*也是G的完备匹配。M^*中的边之端点集合含G的每个顶点恰一次，所以

$$W(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V(G)} l(v).$$

另一方面，若M是G中任意一个完备匹配，则

$$W(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leqslant \sum_{v \in V(G)} l(v),$$

所以

$$W(M^*) \geqslant W(M),$$

即M^*是最佳匹配。**证毕。**

定理5告知，欲求二分图的最佳匹配，只需用匈牙利算法求取其相等子图的完备匹配；问题是，当G_l中无完备匹配时怎么办？Kuhn和Munkras给出修改顶标的一个算法，使新的相等子图的最大匹配逐渐扩大，最后出现相等子图的完备匹配。

Kuhn Munkras **算法：**

（0）选定初始的可行顶标l，确定G_l，在G_l中选取一个匹配M。

（1）X中顶皆被M许配，止，M即为最佳匹配；否则，取G_l中未被M许配的顶u，令$S=\{u\}$，$T=\varnothing$。

（2）若$N_{G_l}(S) \supset T$，转（3）；若$N_{G_l}(S)=T$，取

$$\alpha_l = \min_{x \in S,\, y \notin T} \{l(x)+l(y)-w(xy)\},$$

$$\bar{l}(v) = \begin{cases} l(v)-\alpha_l, & v \in S; \\ l(v)+\alpha_l, & v \in T; \\ l(v), & \text{其它}. \end{cases}$$

$l \leftarrow \bar{l}$，$G_l \leftarrow G_{\bar{l}}$。

（3）选$N_{G_l}(S)-T$中一顶y，若y已被M许配，且$yz \in M$，则$S \leftarrow S \cup \{z\}$，$T \leftarrow T \cup \{y\}$，转（2）；否则，取$G_l$中一个$M$的可增广轨$P(u, y)$，令$M \leftarrow M \ominus E(P)$，转（1）。

例3 已知$K_{5,5}$的权矩阵为

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\
2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\
2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 3 & 3
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

求最佳匹配，其中$K_{5,5}$的顶划分为$X=\{x_i\}$，$Y=\{y_i\}$，$i=1$，2，3，4，5。

解 （1）取可行顶标$l(v)$为$l(y_i)=0$，$i=1,2,3,4,5$；$l(x_1)=\max\{3,5,5,4,1\}=5$，$l(x_2)=\max\{2,2,0,2,2\}=2$，$l(x_3)=\max\{2,4,4,1,0\}=4$，$l(x_4)=\max\{0,1,1,0,0\}=1$，$l(x_5)=\max\{1,2,1,3,3\}=3$。

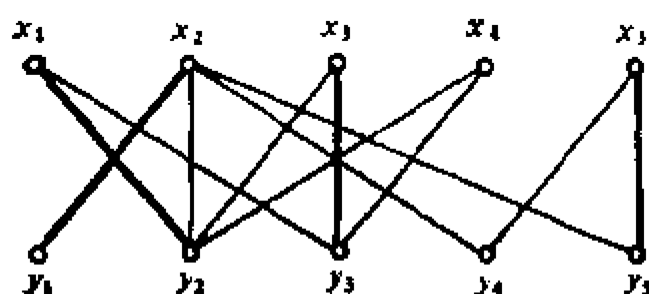


图 7.12

（2）G_l及其上之匹配见图7.12。

这个图中$o(G-x_1)=3$，由Tutte定理知无完备匹配。需要修改顶标。

（3）$u=x_4$，得$S=\{x_4,x_3,x_1\}$，$T=\{y_3,y_2\}$，$N_{G_l}(S)=T$，于是

$$\alpha_l=\min_{x\in S,\ y\notin T}\{l(x)+l(y)-w(xy)\}=1。$$

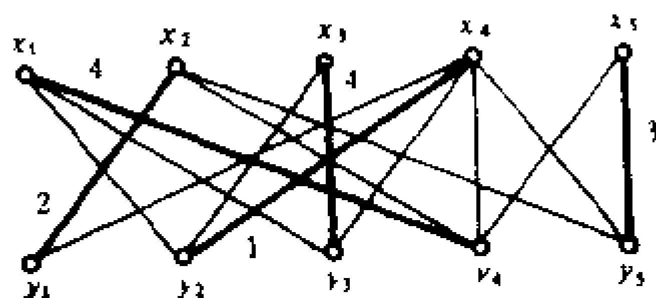


图 7.13

x_1，x_2，x_3，x_4，x_5的顶标分别修改成4，2，3，0，3；

y_1，y_2，y_3，y_4，y_5的顶标分别修改成0，1，1，0，0．

（4）用修改后的顶标$\bar{l}$得$G_{\bar{l}}$及其上面的一个完备匹配如图7.13．图中粗实线给出了一个最佳匹配，其最大权是$2+4+1+4+3=14$．

我们看出：$\alpha_l>0$；修改后的顶标仍是可行顶标；$G_{\bar{l}}$中仍含G_l中的匹配M；$G_{\bar{l}}$中至少会出现不属于M的一条边，所以会造成M的逐渐增广．

匹配问题不但饶有兴趣，而且应用极为广泛，理论上亦较完备，这一章主要应该掌握的内容是：

（1）匹配、许配、最大匹配、完备匹配和$K_{n,n}$中的最佳匹配之定义．

（2）Berge，Hall，König 和 Tutte 的四个基本定理的理解与应用．

（3）匈牙利算法和 Kuhn-Munkres 算法要会执行．关键是用未被许配的顶为根生长外向交错树的方法找到可增广轨，把原匹配增广以及修改顶标而得最佳匹配．

习　　题

1．求K_{2n}和$K_{n,n}$中不同的完备匹配的个数．

2．证明树至多有一个完备匹配．

3．对于$k>1$，给出没有完备匹配的k次正则图的例子．

4．两人在图G上博奕：交替选取不相同的顶点v_0，v_1，v_2，…，使得$i>0$时，v_i与v_{i-1}相邻，直到不能选到顶为止，谁最后选得一顶谁赢．证明：第一个选顶人有必胜策略的充要条件是G中无完备匹配，并叙述一个必胜策略．

5．G的一个k次因子是指G的一个k次正则生成子图．G的k次因子分解是指把G表成无公共边的k次因子之并，即$G=\bigcup_{i=1}^{n}H_i$，其中H_i，$1\leqslant i\leqslant n$是G的k次因子．证明

(a) $K_{n,n}$ 与 K_{2n} 是可1次因子分解的。

(b) Petersen 图是不可1次因子分解的。

6. $K_{2n+1}(n\geqslant 1)$ 可表成 n 个连通的2次因子之并。

7. 证明：8×8的正方形删去对角上两个 1×1 的小正方形后不能用 1×2 的长方形单层遮盖。

8. 证明：二分图有完备匹配的充要条件是对任何 $S\subseteq V$，$|N(S)|\geqslant |S|$。这一命题对一般图是否成立。

9. 对于 $k>0$，证明：

(a) 每个 k 次正则2分图是可以1次因子分解的。

(b) 每个 $2k$ 次正则图可以2次因子分解。

10. 城中每位姑娘都"结识" k 个小伙子，$(k\geqslant 1)$，每个小伙子都"结识" k 个姑娘，则每个小伙子和每个姑娘都能与他们的意中人结婚。

11. 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线，证明：0-1矩阵中含矩阵的所有1的线集合的最小阶数等于没有两个在同一线上的1的最大个数。

12 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}\in\{0, 1\}$，$m\leqslant n$，且矩阵A的每一行都有 k 个1，而每一列中1的个数不超过 k 个，则 $A=P_1+P_2+\cdots+P_k$，其中 P_i 也是 $m\times n$ 的0-1矩阵，每行恰有1个1，每列中1的个数不超过1个。

13. G 是顶集划分为X与Y的二分图，则G的最大匹配的边数等于$|X|-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$。

14. 由 König 定理推导出 Hall 定理。

15. 由 Tutte 理定推导出 Hall 定理。

16. 证明：G是 $k-1$ 边连通 k 次正则图，且 ν 是偶数，则G有完备匹配。

17. 树T有完备匹配的充要条件是对任意 $v\in V(T)$，$o(T-v)=1$。

18. 甲乙二人玩"捉乌龟"游戏，先将54张扑克牌藏起一张，

于是剩下的有一张没有对子，它叫做“乌龟”。再将牌分给两人，每人把手中的对子都抛出来，你能否判断“乌龟”在谁手中？为什么？

19．a，b，c，d，e，f 六个人组成检查团，检查五个单位的工作。若某单位和检查团中的某一成员有过工作联系，则不许他到该单位去检查工作。已知第一单位与 b，c，d 有过联系，第二单位与 a，e，f，第三单位与 a，b，e，f，第四单位与 a，b，d，f，第五单位与 a，b，c 有过联系，请列出去各单位检查的人员名单。

20．$\{ace,\ bc,\ dab,\ db,\ be\}$这组信息是否可以分别把每个字用它的一个字母来代替，加以简化？若能，给出简化结果。

21．A，B，C，D 四种材料造 a，b，c，d 四种产品的成本如下面矩阵所示：

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{bmatrix} 99 & 6 & 59 & 73 \\ 79 & 15 & 93 & 87 \\ 67 & 93 & 13 & 81 \\ 16 & 79 & 86 & 26 \end{bmatrix}$$
$$\quad\ a \quad\ b \quad\ c \quad\ d$$

一种产品只用一种材料，问什么生产方案使成本最低？

22．从64格棋盘上选16个格，使每行每列含其中两个格，求证可以把16个棋子（8个白子8个黑子）放在所选的格子上，使每行每列恰有一个白子一个黑子。

8 支配集与独立集

8.1 支配集与独立集的概念

定义 1 **$D\subseteq V(G)$称为图G的一个支配集，若任何顶点$u\in V(G)$，要么$u\in D$，要么u与D内一顶相邻。一个支配集称为极小支配集，若它的任何真子集皆非支配集。D_0是一个支配集，但已无支配集D_1，使得$|D_1|<|D_0|$，则称D_0是最小支配集，这时记$\gamma(G)=|D_0|$，$\gamma(G)$叫做G的支配数。**

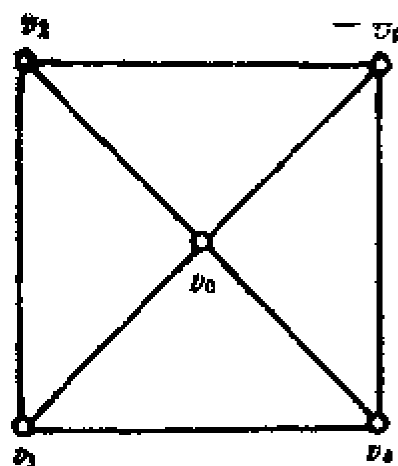


图 8.1

由上述定义可知，凡最小支配集一定是一个极小支配集；任何一个支配集以一个极小支配集为其子集；极小支配集可能有两个以上，而且其顶数也可以不一致。例如，只有一个非叶的顶之树叫做星，星中的非一次顶叫做星心。星心是最小支配集，γ（星）$=1$；但还有一个极小支配集由全部叶构成。一个支配集可能含两个以上的极小支配集，例如图8.1中，$\{v_0,v_1,v_3\}$是支配集，它有两个子集$\{v_0\}$与$\{v_1,v_3\}$都是极小支配集，且$\gamma(G)=1$。

定理 1 **G中无零次顶，则存在一个支配集D，使得$\bar{D}=V(G)-D$也是一个支配集。**

证 不妨设G连通，于是G有生成树T，任取定$v_0\in V(G)$，令

$$D=\{v|v\in V(G),d_T(v_0,v)=0(\bmod 2)\},$$
$$\bar{D}=\{v|v\in V(G),d_T(v_0,v)=1(\bmod 2)\}.$$

则 $\bar{D}=V(G)-D$，且 D 与 $\bar{D}$ 都是支配集。**证毕。**

定理 2　G 中无零次顶，D_1 为极小支配集，则 $\bar{D}_1=V(G)-D_1$ 也是一个支配集。

证　若有一顶 $v_0\in D_1$，而 $\bar{D}_1$ 中没有使 $v_0u\in E(G)$ 的顶 u，则 D_1-v_0 仍为一支配集，与 D_1 为极小支配集矛盾，故 $\bar{D}_1$ 也是支配集。**证毕。**

由定理 2 知，对无孤立顶的图 G 中的一个极小支配集 D_1，至少存在另一个极小支配集 D_2，使得 $D_1\cap D_2=\varnothing$。

定义 2　$I\subseteq V(G)$，I 中任二顶不邻，则称 I 是图 G 的一个独立集；任取 $u\in V(G)-I$，$I\cup\{u\}$ 不是独立集，则称 I 是极大独立集；G 中已无独立集 I_1，使得 $|I_1|>|I|$，则称 I 是 G 的最大独立集，这时，记 $\beta(G)=|I|$，$\beta(G)$ 叫做 G 的独立数。

例如图 8.2 中，两个黑色顶构成一个极大独立集，也是最大独立集，$\beta(G)=2$。

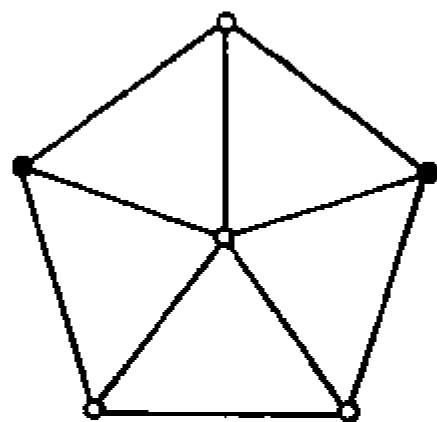


图 8.2

定理 3　一个独立集是极大独立集，当且仅当它是支配集。

证　若 I 是独立集，且是极大独立集，则不存在 $v\in V(G)-I$，使得对任何 $u\in I$，$uv\notin E(G)$，从而 I 是支配集。

反之，若 I 是独立集，又是支配集，则任取 $V(G)-I$ 中一个顶 v，$I\cup\{v\}$ 不是独立集，故 I 是极大独立集。**证毕。**

例如星心是独立集，又是极大独立集，则星心是支配集；同理星的全部叶构成支配集，又是独立集，则它是极大独立集。当然由星的全部叶构成的也是最大独立集。

定理 4　I 是独立集，当且仅当 $V-I$ 是覆盖集。

证　I 是独立集，等价于没有两端都在 I 中的边，而这又等价于 G 的每一边至少有一端在 $V(G)-I$ 中，即等价于 $V(G)-I$ 是

覆盖集。**证毕。**

推论 1 K **是极小覆盖集，当且仅当** $V-K$ **是极大独立集。**

推论 2 $\alpha(G)+\beta(G)=\nu$。

证 设 I 是最大独立集，$|I|=\beta(G)$；设 K 是最小覆盖集，$|K|=\alpha(G)$，由定理 4，$V-I$ 是覆盖集，得

$$\nu-\beta(G)=|V-I|\geqslant\alpha(G)。\tag{1}$$

而 $V-K$ 是独立集，故得

$$\nu-\alpha(G)=|V-K|\leqslant\beta(G)\tag{2}$$

由 (1) 与 (2) 得

$$\alpha(G)+\beta(G)\leqslant\nu,\tag{3}$$

$$\alpha(G)+\beta(G)\geqslant\nu,\tag{4}$$

由 (3) 与 (4) 得

$$\alpha(G)+\beta(G)=\nu$$

证毕。

定理 4 极大独立集必为极小支配集。

证 不妨设 $\varepsilon(G)\neq 0$。设 I 为极大独立集，故对任何 $u\in V-I$，u 与 I 中一顶相邻，所以 I 是支配集。又任取 $v\in I$，v 与 $I-\{v\}$ 中的顶不相邻，可见 I 是极小支配集。**证毕。**

定理 4 之逆不真，例如 4 阶圈上的两个相邻的顶是极小支配集，但不是极大独立集，连独立集也不是。

对于连通图，覆盖集必为支配集；但反过来未必成立，例如 4 条辐的轮心构成支配集，但它不是覆盖集。

8.2 支配数、覆盖数和独立数的计算

8.2.1 逻辑运算及其性质

设 X,Y,Z 是三条指令，规定：

“要么执行 X，要么执行 Y” 记成 $X+Y$。

“X 与 Y 同时执行” 记成 XY。

上述逻辑运算有以下运算定律：

（1）交换律

$$X+Y=Y+X;$$
$$XY=YX.$$

（2）结合律

$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z);$$
$$(XY)Z=X(YZ).$$

（3）分配律

$$X(Y+Z)=XY+XZ;$$
$$(Y+Z)X=XY+XZ.$$

（4）吸收律

$$X+X=X;$$
$$XX=X;$$
$$X+XY=X.$$

上述定律可直接由定义验明；这些定律，尤其是吸收律，在下面的计算中用处极大。

8.2.2 求出所有极小支配集的公式

公式

$$\psi(v_1,v_2,\cdots,v_\nu)=\prod_{i=1}^{\nu}\Big(v_i+\sum_{u\in N(v_i)}u\Big).$$

公式中的运算是逻辑运算，展开成积之和，每一项给出一个极小支配集，所有项给出了一切极小支配集，其中最小者为最小支配集。

例 1 求图 8.3 中的一切极小支配集及支配数。

解

$$\begin{aligned}
&\psi(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)\\
&=(v_1+v_2+v_3+v_4)(v_2+v_1+v_4)(v_3+v_1+v_4)(v_4+v_1+v_2\\
&\quad+v_3+v_5+v_6)(v_5+v_4+v_6)(v_6+v_4+v_5)\\
&=(1+2+3+4)(2+1+4)(3+1+4)(4+1+2+3+5+6)
\end{aligned}$$

$(5+4+6)(6+5+4)$

$=15+16+4+235+236,$

故得所有极小支配集如下：

$\{v_1,v_5\}$，$\{v_1,v_6\}$，$\{4\}$，$\{v_2,v_3,v_5\}$，$\{v_2,v_3,v_6\}$。

$\gamma(G)=1$。

8.2.3 求出所有极小覆盖集的公式

公式

$$\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_\nu)=\prod_{i=1}^{\nu}\left(v_i+\prod_{u\in N(v_i)}u\right),$$

展开成积之和形式，每一项表出一个极小覆盖，得到了所有极小覆盖，其中最小者为最小覆盖。

例 2 求图8.4中一切极小覆盖集及覆盖数$\alpha(G)$。

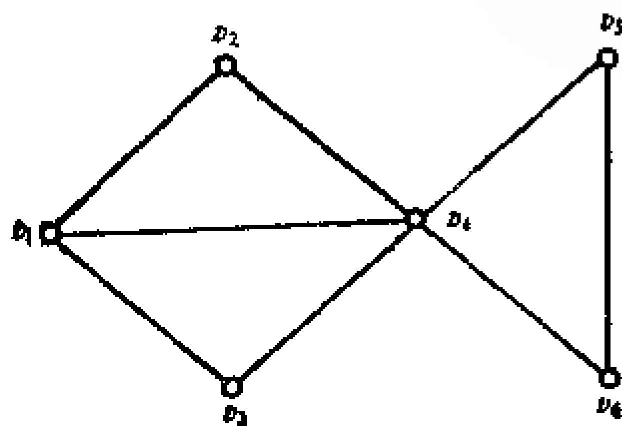


图 8.3

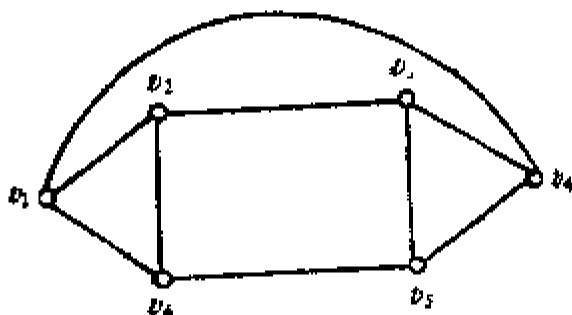


图 8.4

解 $\varphi(v_1,v_2,\cdots v_6)$

$=(1+246)(2+136)(3+245)(4+135)(5+346)(6+125)$

$=2456+1356+1346+2346+1245+1235$。

即得一切极小覆盖集如下：

$\{v_2,v_4,v_5,v_6\}$，$\{v_1,v_3,v_5,v_6\}$，$\{v_1,v_3,v_4,v_6\}$，

$\{v_2,v_3,v_4,v_6\}$，$\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$，$\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$。

$\alpha(G)=4$。

例 3 求图 8.[illegible]大独立集及独立数 $\beta(G)$。

解 由极大独立集与极小覆盖集的互补性，得一切极大独立集如下：

$V-\{v_2,v_4,v_5,v_6\}=\{v_1,v_3\}$，$V-\{v_1,v_3,v_5,v_6\}=\{v_2,v_4\}$，

$V-\{v_1,v_3,v_4,v_6\}=\{v_2,v_5\}$，$V-\{v_2,v_3,v_4,v_6\}=\{v_1,v_5\}$，

$V-\{v_1,v_2,v_4,v_5\}=\{v_3,v_6\}$，$V-\{v_1,v_2,v_3,v_5\}=\{v_4,v_6\}$。

$\beta(G)=2$。

8.3 支配集与独立集的应用

8.3.1 中心台站的选址

要在 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 这 n 个城镇建立一个通讯系统，为此，从这几个城镇中选定几座城镇，在那里建立中心台站，要求它们与其它各城镇相邻，同时，为减少造价，要使中心台站数目最少，有时还会提其它要求，例如在造价最低的条件下，需要造两套（或更多套）通讯中心，以备一套出故障时，启用另一套。

这种问题的数学模型是：以城镇为顶，仅当两城之间有直通通讯线路时，相应的两顶连一边形成一个图，此图的最小支配集即为所求。若建两套，则从一切极小支配集 $D_1,D_2,\cdots,D_d$ 中选取 D_m 与 D_n，使得

$$D_m\cap D_n=\varnothing,$$

$$|D_m\cup D_n|=\min\{|D_i|+|D_j|\,|\,1\leqslant i,j\leqslant d,D_i\cap D_j=\varnothing\}.$$

例如在图 8.3 中所示的六个城镇之中建中心台站，由例 1 知，若建一套，只需建立在 v_4 城；若建两套，则 v_4 建一套，v_1,v_5 或 v_1,v_6 建第二套。

有些实际问题可以化成上述这种数学模型来处理。

8.3.2 信息论中的独立集问题

独[illegible]集对信息论有十分重要的应用。例如信息传送的基本信

号集合为S，

$$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_5\}.$$

可以把信号s_i设想成汉字或拉丁字母.统计规律表明哪些信号与哪些信号易于发生错乱是已知的。例如，输入s_i，$i=1,2,\cdots,5$，输出应该是s_i^*，$i=1,2,\cdots,5$，但由于干扰发生了错乱，s_1可能和s_2错乱，s_1还可能和s_5错乱等等，例如已知错乱可能性如图8.5所示。

为了确切地从输出信号得知输入信号，我们不能选用$s_1,s_2,\cdots,s_5$中的每一信号，只能从中选一部分用于输出.这就导致求图8.6中的最大独立集，之所以用最大独立集，目的是使可用于输出的信号最多。例如可以选s_1与s_3做为输出信号，或选s_1

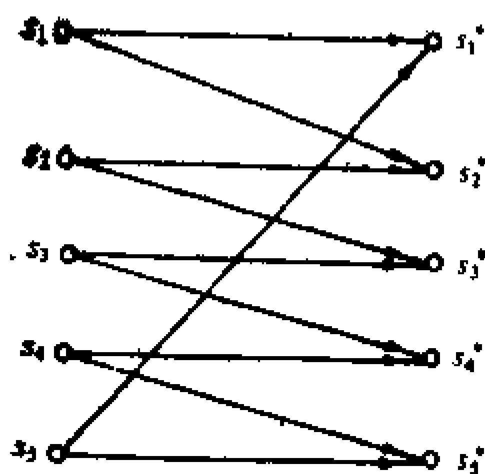


图 8.5

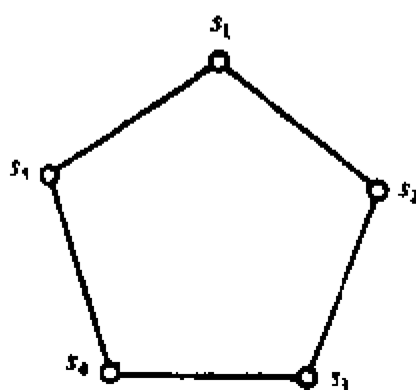


图 8.6

与s_4或s_2与s_4或s_2与s_5或s_3与s_5做输出信号，它们都构成最大独立集。

如果用两信号组成一个词向外传输信息，也有一个如何排除干扰的问题，为此，我们考虑一种图的积的概念。

定义 3 两个图G_1与G_2，

$$V(G_1)=\{v_1^{(1)},v_1^{(2)},\cdots,v_1^{(n_1)}\},$$

$$V(G_2)=\{v_2^{(1)},v_2^{(2)},\cdots,v_2^{(n_2)}\}.$$

构作图G，使得

$$V(G)=\{(v_i^{(1)},v_j^{(2)})\mid v_i^{(1)}\in V(G_1),v_j^{(2)}\in V(G_2)\},$$

G中的顶 $(v_i^{(1)},v_j^{(2)})$之邻集为

$$\begin{aligned}N(v_i^{(1)},v_j^{(2)})=&\{(v_k^{(1)},v_j^{(2)})\mid v_k^{(1)}\in N(v_i^{(1)})\}\\ &\cup\{(v_i^{(1)},v_l^{(2)})\mid v_l^{(2)}\in N(v_j^{(2)})\}\\ &\cup\{(v_k^{(1)},v_l^{(2)})\mid v_k^{(1)}\in N(v_i^{(1)}),v_l^{(2)}\in N(v_j^{(2)})\}.\end{aligned}$$

则称G为G_1与G_2之积，记成$G=G_1\times G_2=G_2\times G_1$。

例如G_1是K_3，G_2是K_2，则$G_1\times G_2$是K_6，见图8.7

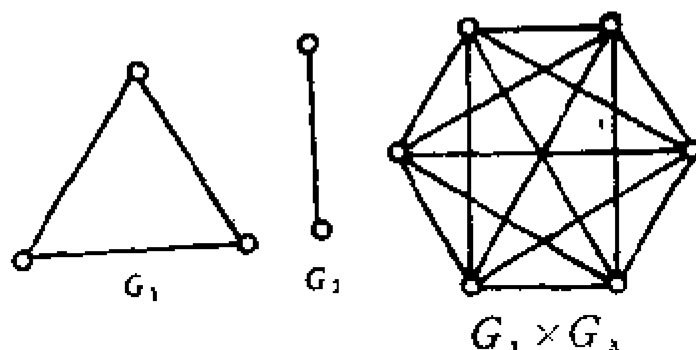


图 8.7

在上面讨论过的例子中，若用$\{s_1,s_2,\cdots,s_5\}$中的两个信号组成词向外输出，最多能用哪几个词才不致于发生错乱呢？这只需考虑圈$C=s_1s_2s_3s_4s_5s_1$的平方$C\times C=C^2$中的最大独立集中的各顶对应的词。相似地可用$G^n=\underbrace{G\times G\times\cdots\times G}_{n个}$中的最大独立集来确定由$n$个信号组成的词进行信息传送而不致发生错乱。

8.4 Ramsey数$r(k,l)$

定义 4 单图G的团是顶集的子集S，使得$G[S]$是完全图。对任意给定的自然数k与l，若存在最小自然数$r(k,l)$，使得每个$r(k,l)$个顶的图包含k个顶的团或l个顶的独立集，则称$r(k,l)$为 Ramsey 数。

例如　$r(1,l)=r(k,1)=1$，

$r(2,l)=l$，$r(k,2)=k$。

Ramsey 于1930年证明，对任意给定的自然数 k 与 l，Ramsey 数 $r(k,l)$是存在唯一的，但 Ramsey 数的确定则非常之难，以致于连 $r(4,5)$ 的值至今尚未得出！

定理 5 **k,l 为自然数，$k\geqslant 2$，$l\geqslant 2$，则**

$$r(k,l)\leqslant r(k,l-1)+r(k-1,l);$$

若 $r(k,l-1)$与$r(k-1,l)$皆偶数，则上面不等式是严格不等式.

证 令G是 $r(k,l-1)+r(k-1,l)$个顶的图，$v\in V(G)$，我们分两种情形讨论：

（1）v 与至少 $r(k,l-1)$ 个顶的集合 S不相邻，

（2）v 与至少 $r(k-1,l)$ 个顶的集合T相邻.

由于与 v 相邻的顶点数目加上与 v不相邻的顶点数目是$r(k,l-1)+r(k-1,l)-1$，所以要么（1）要么（2）必然成立（v与S不相邻指 v 与 S 中每个顶都不是邻顶；v 与T相邻，指 v 与T中每个顶皆相邻）.

在情形（1），$G[S]$中有 k 顶团或 $l-1$ 顶独立集，故$G[S\cup\{v\}]$中有 k 顶团或 l 顶独立集；相似地，在情形(2)，$G[T\cup\{v\}]$中有 k 顶团或 l 顶独立集．由于（1）与（2）必出现其中的一种情形，故G中含 k 顶团或 $l-1$ 顶独立集，所以成立

$$r(k,l)\leqslant r(k-1,l)+r(k,l-1).$$

设 $r(k-1,l)$ 与 $r(k,l-1)$ 皆偶数，且G是顶数是 $r(k-1,l)+r(k,l-1)-1$ 的图，因而G的顶数是奇数，必有一顶 v 是偶次的；特别地，v不与 $r(k-1,l)-1$ 个顶相邻，故（1）或（2）成立。于是G含 k 顶团或 l 顶独立集，故

$$r(k,l)\leqslant r(k,l-1)+r(k-1,l)-1,$$

即得严格不等式

$$r(k,l)<r(k,l-1)+r(k-1,l).$$

证毕.

定义 5 **$r(k,l)-1$ 个顶的既无 k 顶团又无 l 顶独立集的图叫做(k,l)-Ramsey 图.**

由 $r(k,l)$ 的定义，对于 $k\geq 2$，$l\geq 2$，(k,l)-Ramsey 图是存在的。通过一些 Ramsey 图可以确定相应的 Ramsey 数。

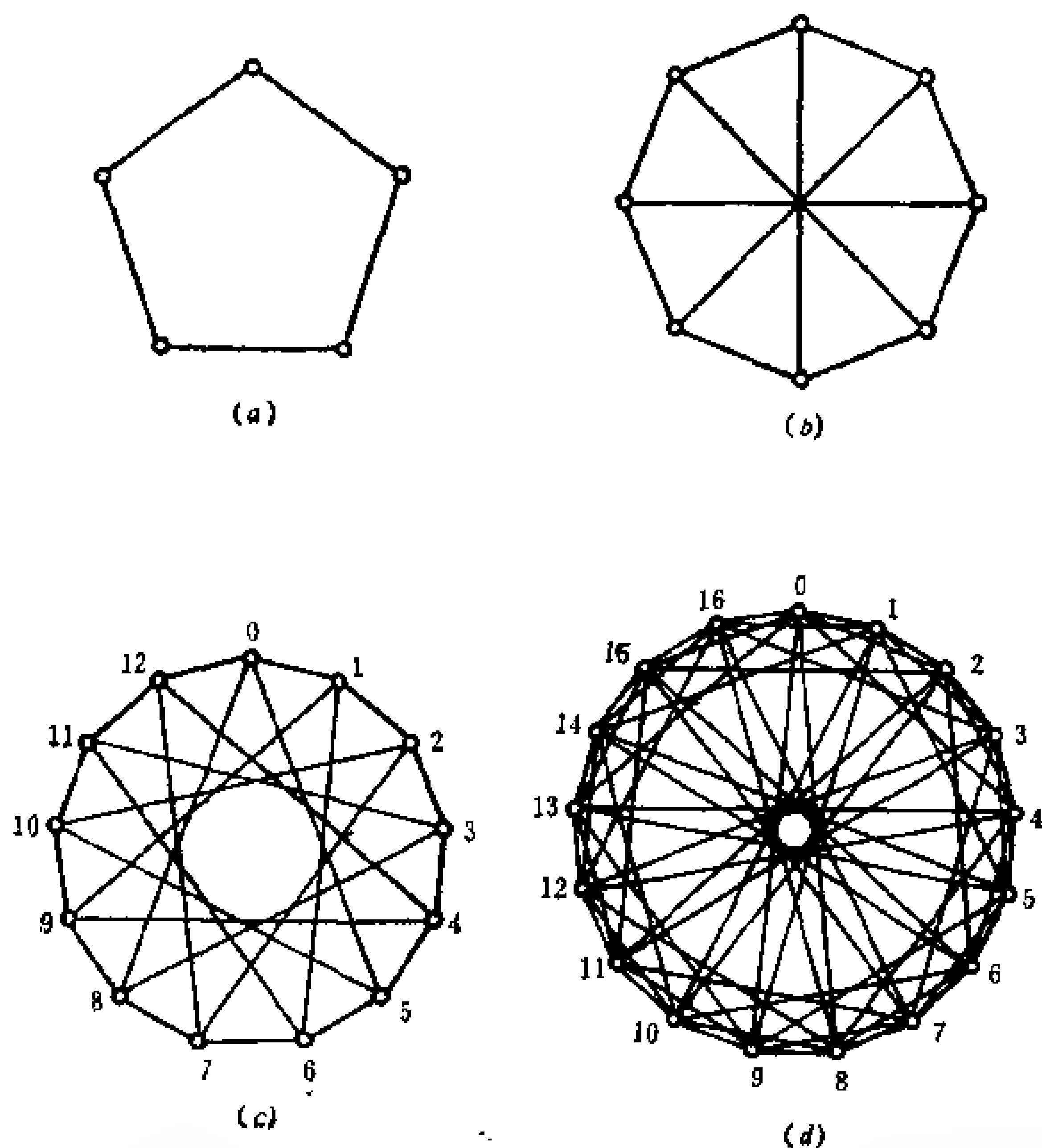


图 8.8

图 8.8(a)是 (3,3)-Ramsey 图，它既无 3 顶团，亦无 3 顶独立集；(b)是(3,4) Ramsey 图，它既无 3 顶团，亦无 4 顶独立集；(c) 是 (3,5)-Ramsey 图，它既无 3 顶团，亦无 5 顶独立集；(d)是(4,4) Ramsey 图，它既无 4 顶团，亦无 4 顶独立集。

下面利用上述四个 Ramsey 图及定理 5 确定几个较小的

Ramsey 数。

（1）由图8.8(a)知

$$r(3,3)\geqslant 6;$$

又由定理 5，

$$r(3,3)\leqslant r(3,2)+r(2,3)=6,$$

故得

$$r(3,3)=6.$$

（2）由图8.8(b)知

$$r(3,4)\geqslant 9;$$

又由定理 5，

$$r(3,4)\leqslant r(2,4)+r(3,3)-1=4+6-1=9,$$

故得

$$r(3,4)=9.$$

（3）由图 8.8(c)知

$$r(3,5)\geqslant 14;$$

又由定理 5，

$$r(3,5)\leqslant r(2,5)+r(3,4)=5+9=14,$$

故得

$$r(3,5)=14.$$

（4）由图 8.8 (d)知

$$r(4,4)\geqslant 18;$$

又由定理 5，

$$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=9+9=18,$$

故得

$$r(4,4)=18.$$

显然，$r(k,l)=r(l,k)$，至今已知的 Ramsey 数共计34个，其中除去 $r(k,1)=r(1,l)=1$，$r(k,2)=k$，$r(2,l)=l$ 这些平凡的 Ramsey 数而外，事实上我们知道的 Ramsey 数 $r(k,l)$ 只有6个，$r(3,3)$，$r(3,4)$，$r(3,5)$，$r(3,6)$，$r(3,7)$，$r(4,4)$；

$k \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18			
5	1	5	14				
6	1	6	18				
7	1	7	23				

上面几个 Ramsey 图都是高度对称的很端正很漂亮的图，如果我们能设计出(4,5)-Ramsey 图，$r(4,5)$的值也就确定出来了。

下面给出 $r(k,l)$ 的界。

定理 6 $r(k,l)\leqslant\binom{k+l-2}{k-1}$.

证 对 $k+l$ 用数学归纳法，由于 $r(1,l)=r(k,1)=1$，$r(k,2)=k$，$r(2,l)=l$，对于 $k+l\leqslant 5$，定理成立。

假设对于一切满足 $5\leqslant k+l<m+n$ 的正整数 l,k，定理已成立，m,n 是自然数。由定理 5 及归纳法假设，得

$$
\begin{aligned}
r(m,n) &\leqslant r(m,n-1)+r(m-1,n)\\
&\leqslant\binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2}\\
&=\binom{m+n-2}{m-1}.
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 7 (Erdös,1947) $r(k,k)\geqslant 2^{\frac{k}{2}}\ (k>1)$.

证 因 $r(2,2)=2$，故对 $k=2$，定理成立，下面考虑 $k\geqslant 3$。

令 $\mathscr{G}_n$ 表示以 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为顶集的图之集合，$\mathscr{G}_n^k$ 表示 $\mathscr{G}_n$ 中有 k 顶团的那些图组成的集合。显然

$$|\mathscr{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}. \qquad (1)$$

这是因为 $\binom{n}{2}$ 条边组成的边集之每一子集合确定一个 $\mathscr{G}_n$ 中的图，而有 $\binom{n}{2}$ 个元素的集之子集个数为 $2^{\binom{n}{2}}$。相似地，$\mathscr{G}_n$ 中有某个指定的 k 顶团的图的数目为 $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$。又因为存在 $\binom{n}{k}$ 个不同的 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 的 k 元素子集，所以有

$$|\mathscr{G}_n^k| \leqslant \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}. \qquad (2)$$

由（1）与（2），

$$\frac{|\mathscr{G}_n^k|}{|\mathscr{G}_n|} \leqslant \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}. \qquad (3)$$

设 $n<2^{\frac{k}{2}}$，由（3）得

$$\frac{|\mathscr{G}_n^k|}{|\mathscr{G}_n|} < \frac{2^{\frac{k^2}{2}} 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2} \qquad (k \geqslant 3).$$

因此，$\mathscr{G}_n^k$ 中的图的个数比 $\mathscr{G}_n$ 中的图个数之半还少。又 $\mathscr{G}_n = \{G \mid G^c \in \mathscr{G}_n\}$，且 S 是图 G 的团的充要条件是 S 为 G^c 的独立集，故有 k 顶独立集的图在 $\mathscr{G}_n$ 中亦不过半数。故在 $\mathscr{G}_n$ 中有某个图，它既无 k 顶团，亦无 k 顶独立集，所以我们有

$$r(k,k) \geqslant 2^{\frac{k}{2}}.$$

证毕.

推论 3 $m=\min\{k,l\}$，则 $r(k,l) \geqslant 2^{\frac{m}{2}}$。

当 $k=4$ 时，$r(4,4) \geqslant 2^{\frac{4}{2}} = 4$，其实 $r(4,4)=18$，可见Erdös给的下界与真实值之间的误差可能很大。

本章介绍的支配集与独立集问题，在图论中是非常之困难而又引人入独的问题之一。尤其涉及到这些问题的定量计算，一大部

很难得以进展，但它又有强烈的实用背景，所以成了图论研究的热点之一。需要着重理解的内容是：

（1）极小支配集，最小支配集，极小覆盖集，最小覆盖集，极大独立集，最大独立集的定义及其彼此之间的关系。尤其是覆盖与独立集之间的互补关系。

（2） Ramsey 数与 Ramsey 图的概念。

（3） 求支配数、覆盖数与独立数的逻辑公式对小图可以用，但对较大的图，计算量会陡增；目前尚无解此问题的有效算法。

（4） Ramsey 数的确定是数学当中的老大难问题之一，目前首当其冲的是确定 $r(4,5)$。

习　题

1. 求 Petersen 图的所有极小支配集及支配数。

2. 求 Petersen 图的所有极小覆盖集及覆盖数。

3. 求 Petersen 图的所有极大独立集及独立数。

4. G 为二分图的充要条件是对 G 的任意子图 H，独立数 $\beta(H) \geq \frac{1}{2}\nu(H)$。

5. 一个图 G 称为是 β-临界的，若 $\forall e \in E(G)$，$\beta(G-e) > \beta(G)$；证明 β-临界图无割顶。

6. $r(k,l) = r(l,k)$。

7. 有三个人相识或 4 个人不相识的人群最少几人？

8. 求 r（二十面体）。

9. 求 α（k 维立方体）。

10. $\forall k \in N$ 存在一个图 G，G 上的一个支配集中含有 k 个极小支配集，试加以证明。

11. 证明或反驳：每个覆盖集中必含最小覆盖集。

12. 国际象棋中，以64个方格为顶的“马图”、“象图”、

"车图"，"皇后图"的独立数、支配数和覆盖数各是多少？

13. 证明：G是顶点不交的完全图的并当且仅当其独立数

$$\beta(G)=\sum_{v\in V(G)}\frac{1}{d(v)+1}.$$

14. 求顶点不交的同构完全图之并所成之图G的覆盖数。

15. 证明：若$\forall u,v\in V(G)$，有$d(u)+d(v)\geqslant\nu$，则$\beta(G)\leqslant\kappa(G)$。

9 着 色 理 论

9.1 边 色 数

本章只讨论无环图。

定义 1 **图**G**的一个**k**边着色是指对**$E(G)$**的一个划分** $C=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$，$E(G)=\bigcup_{i=1}^{k}E_i$，$E_i\cap E_j=\varnothing$，$i\neq j$，$E_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ **中的边皆染上** i **色．若**$E_i\,(1\leqslant i\leqslant k)$**中的边两两不相邻，则称**$C$**是一个正常**$k$**边着色．**$G$**可以正常**$k$**边着色，而不能正常**$k-1$**边着色时，则称**$k$**为**$G$**的边色数，记成**$\chi'(G)=k$**．与顶**$v$**关联的边中有**$i$**色边时，称**$i$**色在顶**$v$**处出现，在顶**$v$**处出现的颜色数目记成**$c(v)$**．**

例如任何图皆可正常ε边着色．G可以正常k边着色，当$k<l\leqslant\varepsilon$时，亦可正常l边着色．显然，$\chi'(G)\geqslant\Delta$．正常边着色时$c(v)=d(v)$，其中v是$V(G)$中任取的一顶．正常边着色时的边划分$C=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$中的$E_i\,(i=1,2,\cdots,k)$是G中一个匹配．

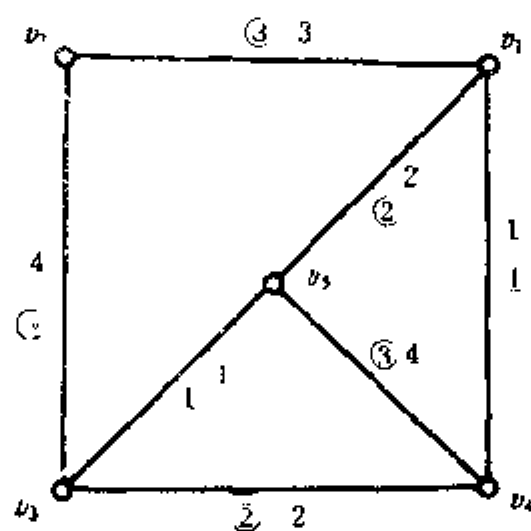


图 9.1

例 1 求图 9.1 的边色数．

解 图上我们已经标明了用四种颜色正常边着色的一种方式，即 $C=(\{v_1v_4,v_3v_5\},\{v_1v_5,v_3v_4\},\{v_1v_2\},\{v_4v_5,v_2v_3\})$；但是，若欲用 3 种颜色进行正常边着色，则只能按圆圈中的颜色号码对边染色，但这时 v_2v_3 边无法上色，故 $\chi'(G)=4$。

引理 1 **G是连通图，非奇圈，则存在 2 边着色，使所用的两种颜色在每个次数至少为 2 的顶处出现。**

证 设G是 Euler 图；若G是偶圈，命题显然成立；若G不是偶圈，至少有一个顶 v_0，$d(v_0)\geq 4$。令 $v_0e_1v_1e_2\cdots e_\varepsilon v_0$ 是 G 的一条Euler 回路，令

$$E_1=\{e_i \mid i\text{ 为奇数}\},\quad E_2=\{e_i \mid i\text{ 为偶数}\}.$$

于是 $C=(E_1,E_2)$ 即为所求之 2 边着色。

若G不是Euler 图，我们增加一个新顶 v_0，把 v_0 与G的每个奇次顶之间连一条边，得到的图 G^* 是 Euler 图，令$v_0e_1v_1\cdots e_{\varepsilon^*}v_0$ 是 G^* 的一个 Euler 回路，仍如上定义 E_1 与 E_2，则 $C=(E_1\cap E(G),E_2\cap E(G))$ 即为所求之 2 边着色。**证毕。**

定义 2 **设C与C'都是G的 k 边着色，相应的 $c(v)$ 与 $c'(v)$ 满足**

$$\sum_{v\in V(G)} c'(v) > \sum_{v\in V(G)} c(v),$$

则称 C' 是对C的一个改善，不能改善的 k 边上色叫做最佳 k 边着色。

引理 2 **$C=(E_1,E_2,\cdots,E_k)$是G的一个最佳 k 边着色，存在一个顶 u 及两种颜色 i，j，i 色不在 u 处出现，而 j 色在 u 处至少出现两次，则 $G[E_i\cup E_j]$中含 u 的连通片是一个奇圈。**

证 设 u 是满足引理条件的顶，而H是 $G[E_i\cup E_j]$中含 u 的连通片。若H不是奇圈，由引理 1，H有一个 2 边着色，所用两种颜色在H的次数至少为 2 的每个顶处都出现。我们用 i,j 两种颜色依引理 1 的办法对H的边重新着色。因为在此新的 k 边着色$C'=(E'_1,E'_2,\cdots,E'_k)$中，$i,j$ 两色都在 u 处出现，故 $c'(u)=c(u)+1$，而 $v\neq u$ 时，$c'(v)\geq c(v)$，于是

$$\sum_{v\in V(G)} c'(v) > \sum_{v\in V(G)} c(v),$$

与C是最佳k边着色矛盾。**证毕。**

定理 1 χ'(二分图) $=\Delta$。

证 若χ'(二分图 G)$>\Delta$，$C=(E_1,E_2,\cdots,E_\Delta)$是一个最佳$\Delta$边着色。令顶$u$满足$c(u)<d(u)$，显然，$u$满足引理2的条件，因此$G$中有奇圈，与$G$为二分图矛盾，故$\chi'$(二分图)$\leqslant\Delta$；又$\chi'\geqslant\Delta$，故$\chi'$(二分图)$=\Delta$。**证毕。**

定理 2(Vizing, 1964) **G是单图，要么$\chi'(G)=\Delta$，要么$\chi'(G)=\Delta+1$。**

证 G是单图，$\chi'(G)\geqslant\Delta$，我们只需证明$\chi'(G)\leqslant\Delta+1$。假设$\chi'>\Delta+1$，令$C=(E_1,E_2,\cdots,E_{\Delta+1})$是$G$的最佳$\Delta+1$边着色，$u$是$c(u)<d(u)$的一个顶，则存在颜色$i_0$，$i_1$，$i_0$在$u$处不出现，而$i_1$在$u$处至少出现两次。设$uv_1$是$i_1$色(图9.2)，因为$d(v_1)<\Delta+1$，其色$i_2$在$v_1$处不出现，$i_2$在$u$处出现，否则用$i_2$重新对$uv_1$着色，得到一个对$C$的改善，这与$C$是最佳$\Delta+1$边着色矛盾。故某边$uv_2$着色为$i_2$。又$d(v_2)<\Delta+1$，某色$i_3$不在$v_2$处出现，$i_3$必在$u$处出现，不然用$i_2$对$uv_1$，用$i_3$对$uv_2$重新上色，会得到对$C$的改善，这是不可能的。故有某边$uv_3$着色$i_3$。继续这个过程，我们构作了一顶序列$v_1$，$v_2$，…和一个颜色序列$i_1$，$i_2$，…，使得

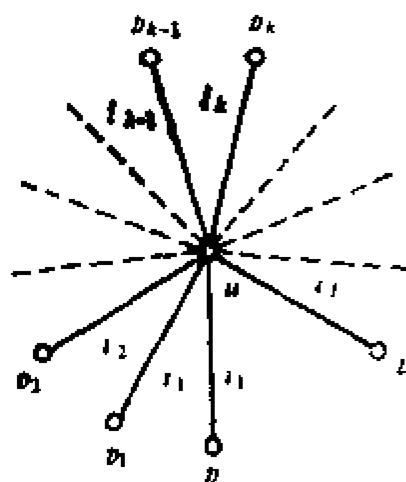


图 9.2

（1）uv_j着色i_j，且

（2）i_{j+1}不在v_j处出现。

由于u的次数有限，所以存在最小整数l，使得对某个$k<l$有

（3）$i_{l+1}=i_k$（图9.2）

我们用下述办法对G的边重新着色：对于$1\leqslant j\leqslant k-1$，用$i_{j+1}$重新对$uv_j$上色，得到一个新的$\Delta+1$边着色$C'=(E'_1,E'_2,\cdots,E'_{\Delta+1})$（图9.3）．显然，对一切$v\in V(G)$，

$$c'(v)\geqslant c(v),$$

且C'是一个最佳$\Delta+1$边着色．由引理2，$G[E'_{i_0}\cup E'_{i_k}]$的含u的连通片H'是一个奇圈．

现在，我们用$i_{j+1}(k\leqslant j\leqslant l-1)$重新给$uv_j$上色，在$uv_l$上的颜色是$i_k$，得到$\Delta+1$边着色$C''=(E''_1,E''_2,\cdots,E''_{\Delta+1})$（图9.4）．显然，对一切$v\in V(G)$，

$$c''(v)\geqslant c(v),$$

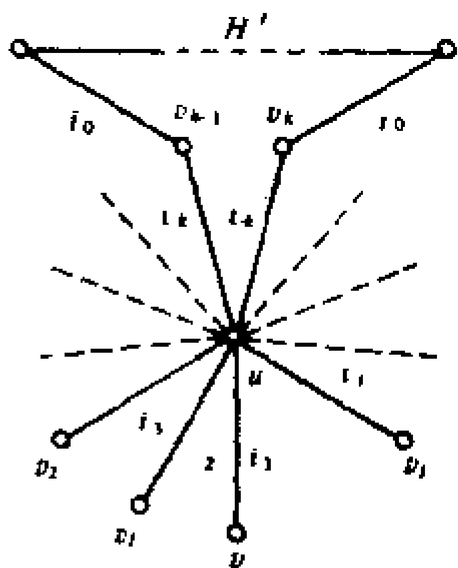


图 9.3

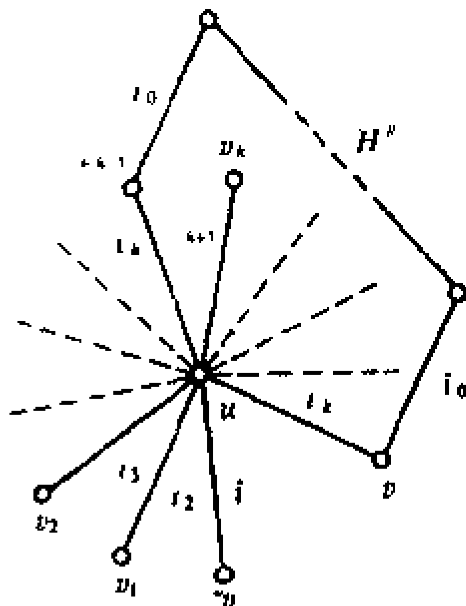


图 9.4

且$G[E''_{i_0}\cup E''_{i_k}]$含$u$的连通片$H''$是一个奇圈．但在$H'$中$v_k$的次数为2，在$H''$中$v_k$的次数是1，这是不可能的．**证毕．**

我们根据$\chi'(G)$的值把一切单图划分成两类，$\chi'(G)=\Delta$的图G称为**第一类的图**，$\chi'(G)=\Delta+1$的图G称为**第二类的图**．二分图是第一类的图，而妖怪是第二类的图．

9.2 Ramsey 数和 Schur 定理

第八章中我们讨论过 Ramsey 数，用着色的语言来讲，就是：对任意给定的自然数k与l，$r(k,l)$是满足如下条件的最

小整数 n，得使 K_n中的任一个 2 边着色(E_1,E_2)或 $K_n[E_1]$含子图 K_k，或 $K_n[E_2]$中含子图 K_l，则称 $r(k,l)$ 为 Ramsey 数。

用上述定义可以把 $r(k,l)$推广。

定义 3　对任意给意的由 m 个数组成的自然数列 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，$r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$是满足下列条件的最小整数 n，对 K_n的任意 m 边着色$(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，存在某个 i，$K_n[E_i]$中有 K_{k_i}子图，$1\leqslant i\leqslant m$，则称 $r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$为 Ramsey 数。

与 $R(k,l)$相似地有上界估计公式：

$$r(k_1,k_2,\cdots,k_m)\leqslant r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)+r(k_1,k_2-1,k_3,\cdots,k_m)+\cdots+r(k_1,k_2,\cdots,k_{m-1},k_m-1)-m+2,$$

$$r(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_m+1)\leqslant\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

定理 3（Schur，1916）**设$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$是集合$\{1,2,\cdots,r_n\}$的任一划分，其中 $r_n=r(\underbrace{3,3,\cdots,3}_{n个3})$，则对某个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，$s_i$中有三个数 x,y,z，满足 $x+y=z$。**

证　考虑 K_{r_n}，K_{r_n}的顶集为$\{1,2,\cdots,r_n\}$，对 K_{r_n}用 1，2，3，…，n这 n 种颜色进行边着色，当且仅当$|u-v|\in s_j$时，uv 边着以 j 色；由 r_n 定义，在 K_{r_n}中有单色三角形，即有三个顶 a，b，c，ab，ac，bc 有同种颜色 i。无损一般性，设 $a>b>c$，令 $x=a-b$，$y=b-c$，$z=a-c$，则 $x,y,z\in s_i$，且 $x+y=z$。**证毕**。

例 2　平面上有六个点，任何三点都是一个不等边三角形的顶点，则这些三角形中有一个的最短边又是另一个三角形的最长边。

证　把每个三角形的最短边染成红色，剩下的边染成白色。由于 $r_2=6(r_2=r(3,3))$，所以必有单色三角形。又每个三角形都有最短边，所以每个三角形上都有红色边，故上述单色三角形是红色的，所以它的最长边也是红色的，同时，这个红色边又是

另一个三角形的最短边。**证毕.**

例 3 把{1,2,3,4,5,6}划分成两个集合，则必有一个集合包含两数及其差.

证 $r_2=6$,由Schur定理,在题中所述划分出的两个集合中，必有一个集合 S 中有三个数 x,y,z,满足 $x+y=z$，于是该集合 S 中有两数 z,x 及其差 y. **证毕.**

9.3 时间表问题

学校里有 m 位教师 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和 n 个班级 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. x_i 老师为 y_j 班每天上课 p_{ij} 学时. 试安排一个授课表，使学校上课的时间最少。

令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，顶 x_i 与 y_j 之间有 p_{ij} 条边相连，形成一个二分图。每一学时，每位教师最多为一个班上课，每个班也至多接受一个老师的授课。故我们的问题之解就是求 $\chi'(G)$。因 χ'(二分图)$=\Delta$，若没有授课多于 p 节的教师，也没有授课多于 p 节的班级，则可以编出一个至多 p 节课的时间表。然而,若只有指定的几个教室可用，全校一天最少安排几节课?

设共计 l 门功课，编成每天 p 节课的功课表，每节课平均要开 $\frac{l}{p}$ 门功课，至少需要$\left\{\frac{l}{p}\right\}$间教室. 为了编制功课表，我们首先给出下面的引理和定理。

引理 3 **M和N是图G的无公共边的匹配，且$|M|>|N|$，则存在无公共边的匹配M',N'，使得**

$$|M'|=|M|-1,\ |N'|=|N|+1,\ M'\cup N'=M\cup N.$$

证 考虑 $H=G[M\cup N]$，正如Berge定理之证明，H的每个连通片要么是边在M与N中交错出现的偶圈，要么是边在M与N中交错出现的轨. 又因$|M|>|N|$，H的某一轨型连通片的

始边与终边皆在M内，令这一轨为

$$P=v_0e_1v_1\cdots e_{2n+1}v_{2n+1}$$

且取

$$M'=(M-\{e_1,e_3,\cdots,e_{2n+1}\})\cup\{e_2,e_4,\cdots,e_{2n}\},$$

$$N'=(N-\{e_2,e_4,\cdots,e_{2n}\})\cup\{e_1,e_3,\cdots,e_{2n+1}\}.$$

则M'与N'亦是G中匹配，且满足引理 3 的要求。**证毕。**

定理 4　G是二分图，$\Delta\leqslant p$，则G内存在p个无公共边的匹配$M_1,M_2,\cdots,M_p$，使得

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{p}M_i,$$

且对于$1\leqslant i\leqslant p$,

$$[\varepsilon/p]\leqslant|M_i|\leqslant\{\varepsilon/p\}.$$

证　由于G是二分图，$\chi'(G)=\Delta$，$E(G)$可以划分成Δ个匹配$M'_1,M'_2,\cdots,M'_\Delta$。故对于$p\geqslant\Delta$，存在无公共边的匹配$M'_1$，$M'_2,\cdots,M'_p$（当$i>\Delta$时，令$M'_i=\varnothing$），使得

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{p}M'_i.$$

反复运用引理 3 于那些边数差大于 1 的每对匹配，我们则得到p个两两不相交的匹配$M_1,M_2,\cdots,M_p$，满足定理 4 的要求。**证毕。**

例 4　四名教师，五个班级，教学要求如下：

$$A=\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}y_1&y_2&y_3&y_4&y_5\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}2&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right]\end{array},$$

试排出四间教室，三间教室和两间教室的课程表。

解　以$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$为二

分图的顶集划分构作二分图G，当A矩阵中i，j号元素为a_{ij}时，在x_i与y_j之间加a_{ij}条边，于是$\Delta(G)=4$，$\varepsilon=11$，安排4节课，$\left[\frac{\varepsilon}{4}\right]=2$，$\left\{\frac{\varepsilon}{4}\right\}=3$，由定理4，可安排3个教室4节课的课表；若欲用两个教室，由于$\left\{\frac{11}{6}\right\}=2$，$\left[\frac{11}{6}\right]=1$，则可编排6节课的课表（图9.5）

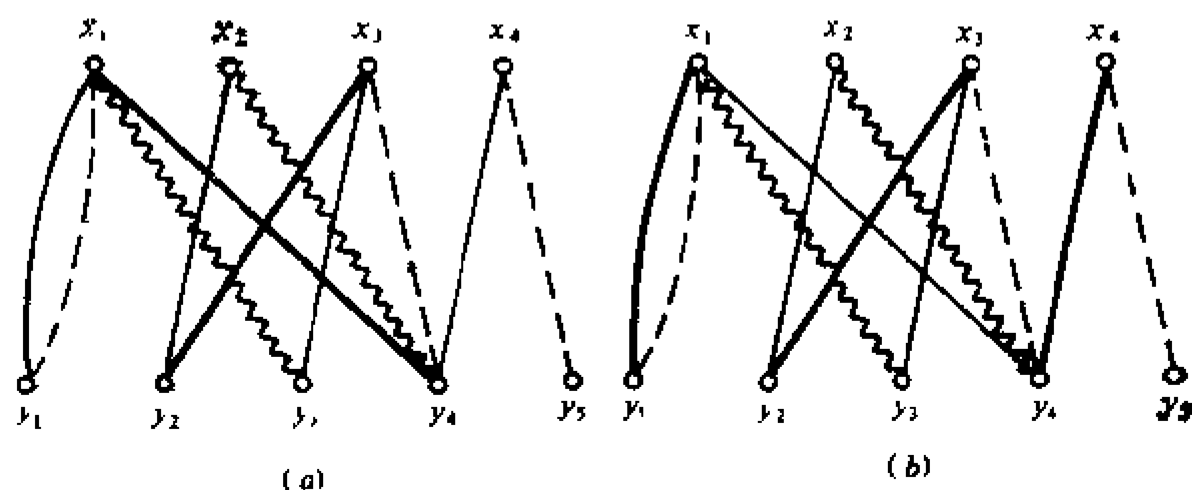


图 9.5

图 9.5(a) 相应的课表为：

教师 \ 节	1	2	3	4	5	6
x_1	y_1	y_1	y_3	y_4	—	—
x_2	y_2	—	y_4	—	—	—
x_3	y_3	y_4	—	y_2	—	—
x_4	y_4	y_5	—	—	—	—

共用四间教室，因为第一节课y_1，y_2，y_3，y_4四个班都在上课。图9.5中细实线代表第一节上课的教师与班级的匹配；第二节用虚线表示；第三节课用浪线表示；第四节课用粗实线表示。

我们把图9.5(a)中的轨$y_1x_1y_4x_4$中粗细实线易位，得图9.5(b)。它对应的课表为：

教师\节	1	2	3	4	5	6
x_1	y_4	y_1	y_3	y_1	—	—
x_2	y_2	—	y_4	—	—	—
x_3	y_3	y_4	—	y_2	—	—
x_4	—	y_5	—	y_4	—	—

因为每节课最多三个班在上课，所以只需三间教室。

根据引理 3 与定理 4，我们把图 9.5(b)中的匹配调整成六个两两不相交的匹配，则可得六节课的课表：

教师\节	1	2	3	4	5	6
x_1	y_4	y_3	y_1	—	y_1	—
x_2	y_2	y_4	—	—	—	—
x_3	—	—	y_4	y_3	y_2	—
x_4	—	—	—	y_4	—	y_5

9.4 顶色数

定义 4 图G的一个k顶着色是指$V(G)$的一个划分$(V_1, V_2,\cdots,V_k)$，V_i中$(1\leqslant i\leqslant k)$的顶皆着以$i$色。又若每个$V_i$中无相邻顶，则称此$k$顶着色为正常$k$顶着色。若$G$可以正常$k$顶着色，但不能$k-1$顶正常着色，则称$G$的色数为$k$，记成$\chi(G)=k$，且称$G$为$k$色图。若$G$的任一真子图$H$，$\chi(H)<\chi(G)$，则称$G$为色临界图，$\chi(G)=k$时，称为$k$色临界图。

例如，$\chi(G)=1$，当且仅当$\varepsilon(G)=0$；$\chi(G)=2$，当且仅当G是有边二分图；每个k色图皆存在k色临界子图。

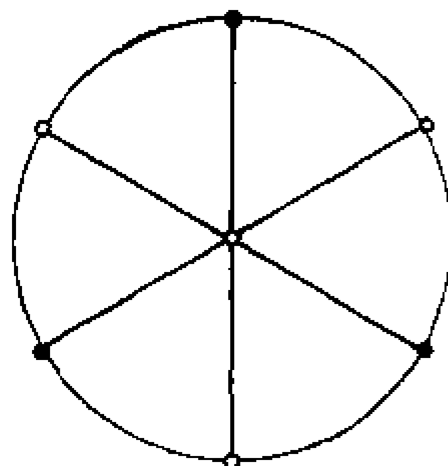


图 9.6

例 5 求 7 顶轮的色数。

解 因为7顶轮G有边，故$\chi(G)>1$；又轮有三角形，即有奇圈，所以非二分图，$\chi(G)>2$，即$\chi(G)\geqslant 3$。我们把轮心着以1色，轮周上2色与3色相间出现，则知$\chi(G)\leqslant 3$，于是$\chi(G)=3$（图9.6）。

这个例题说明$\chi(G)<\Delta(G)+1=7$，也有$\chi(G)=\Delta(G)+1$的图，例如$G=K_3$，$\chi(K_3)=3=\Delta(K_3)+1$。

定理 5 $\chi(G)\leqslant\Delta+1$。

证 任取一顶$v\in V(G)$，着以$\Delta+1$种颜色之一；取无色顶$u\in V(G)$，着以与u相邻的顶上颜色相异的一种颜色。因为$d(u)\leqslant\Delta$，故u的邻顶上的颜色最多Δ种，$\Delta+1$种颜色中至少有一种可以用于u的着色。而$|V(G)|<+\infty$，故如此进行有限次之后可以完成G的正常顶着色，且$\chi(G)\leqslant\Delta+1$。**证毕。**

可以化为求色数的实际问题很多，下面提供三个实例。

（1） **考试安排问题**：学期的期末考试最少几天才能完成？

设学校共有n门功课需要进行期末考试，因为不少学生不止选修一门课，所以不能把一个同学选修的两门课安排在同一个时间进行考试。

我们以每门功课为一个顶，当且仅当两门功课被同一个学生选修时，在相应二顶之间连一条边，得到一个图G。我们对G的顶进行正常着色，同色顶则安排在同一时间考试，于是$\chi(G)$即为学校期末考试所需最少天数。

（2） **存储问题**：有的货物，放在一起不安全（例如黄鼠狼和小鸡），问至少要几个库房才能安全存放？

以货物为顶，在且仅在放在一起不安全的两种货物之间连上一条边，得一图G，$\chi(G)$即为所求。

（3） **距离约束同信道频率分配问题**（代号F*D-CCAP）：地面上有若干无线电发射台，我们要对每个台分配一个频率令其采用，频率用自然数从1起编号，称为信道号码。为排除同信道造成的干扰，我们要求使用同信道的发射台之间相距必须

大于指定的正数d，问至少要用几个信道？

我们以$\frac{d}{2}$为半径，以发射台为圆心作圆，仅当两个圆有公共点时，在两个圆心之间加一边，以圆心为顶，得到一个图G（圆盘图），$\chi(G)$即为所求。

9.5 面 色 数

定义 5 **平面图G平面嵌入后，它的k面着色是指其面集合F的一个划分$(F_1,F_2,\cdots,F_k)$，F_i中的面皆着以i色。如果每个F_i中的面两两无公共边，则称此k面着色为正常k面着色。平面图G有k面正常着色，但不能进行$k-1$面正常着色，则称k是G的面色数，记之为$\chi^*(G)=k$。**

若G^*是G的对偶图，则显然有$\chi(G^*)=\chi^*(G)$。

四色定理有两种表述方式：

（1） **对于任何平面图**G，$\chi^*(G)\leqslant 4$。

（2） **对于任何平面图**G，$\chi(G)\leqslant 4$。

这两种表述是等价的。事实上，若G是平面图，且$\chi(G)\leqslant 4$，由于G^*也是平面图，故$\chi(G^*)\leqslant 4$；又$\chi(G^*)=\chi^*(G)$，故得$\chi^*(G)\leqslant 4$。反之，若$\chi^*(G)\leqslant 4$，不妨设G是平面连通图；则$\chi(G)=\chi((G^*)^*)=\chi^*(G^*)$，而$G^*$是平面图，故$\chi^*(G^*)\leqslant 4$，即$\chi(G)\leqslant 4$。

定理 6 (Heawood, 1890) χ(**平面图**) $\leqslant 5$。

证 我们对ν进行数学归纳法证明。

$\nu\leqslant 5$时，定理显然成立。

假设对$\nu\leqslant n-1$，定理已成立，考虑$\nu=n$的情形。因G是平面图，所以存在$v_0\in V(G)$，$d(v_0)\leqslant 5$。

（1）$d(v_0)\leqslant 4$，考虑$G-v_0$，由归纳法假设，$\chi(G-v_0)\leqslant 5$；再把v_0着以与邻顶（不超过四个）相异的第五色，则知

$\chi(G)\leqslant 5$。

（2）$d(v_0)=5$，设 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 是 v_0 的邻顶，按逆时针为序画在平面上（图9.7），分别着以 a,b,c,d,e 五种颜色。记 $G_0=G-v_0$，G_{ac} 是 G_0 中由 a,c 色之顶导出的子图。在 G_{ac} 中，

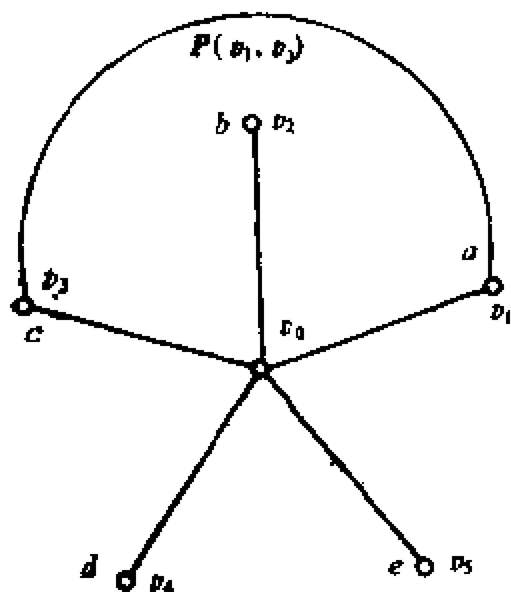


图 9.7

（i）若 v_1 与 v_3 分处于两个连通片，在含 v_1 的连通片中，a,c 两色互换；由归纳法假设，$\chi(G_0)\leqslant 5$；这时，把 v_0 着以 a 色，则得 $\chi(G)\leqslant 5$。

（ii）若 v_1 与 v_3 在一个连通片中，则存在轨 $P(v_1,v_3)$，在 $P(v_1,v_3)$ 上 a，c 二色交替出现，在 G 中 $v_0v_1P(v_1,v_3)v_3v_0$ 是一个圈，因为已经平面嵌入，v_2 与 v_4 必分居于此圈之内外。显然，在 G_0 中由 b,d 两色导出的子图 G_{bd} 中，v_2 与 v_4 分属于两个连通片，不然，在 G_{bd} 中有轨 $P(v_2,v_4)$，它与 $P(v_1,v_3)$ 相交于一个公共顶，这个公共顶一方面在 $P(v_1,v_3)$ 上，是 a 或 c 色；另一方面，在 $P(v_2,v_4)$ 上，是 b 或 d 色，这是不可能的。既然 v_2 与 v_4 在 G_{bd} 中分属于两个连通片，把 v_2 所在的连通片中 b 与 d 色互换，再对 v_0 着以 b 色，则得 $\chi(G)\leqslant 5$。**证毕**。

定理6中**"颜色互换"的技巧**是Kemple首次提出的。这种技巧在染色中不止一次地运用。

例6 平面上任作 n 条直线，把平面划分成若干区域，证明：只需两种颜色即可把全部区域上色，而且有公共边界线的两区域异色。

证 对 n 进行数学归纳法，$n=1$ 时，命题显然成立。假设 $n\leqslant k$ 时，命题已成立，令 $n=k+1$，从 $k+1$ 条直线中任意删除一条直线 L，由归纳法假设，对剩下的 k 条直线划分的区域，可

以只用 a,b 两种颜色着色，且相邻区域异色。这时，再把 L 恢复到原来位置上，且把 L 某一侧的 a,b 两色互换，则得证命题对 $k+1=n$ 仍成立。**证毕。**

9.6 颜色多项式

今有 k 种颜色（$k\geqslant 1$），用以对给定的标志图正常顶着色，问共有多少种不同的着色方式？所谓两次着色方式不同，是指至少有一个顶，两次着色颜色不同。我们用 $P(G,k)$ 表示图 G 的上述不同的着色方式的总数，对给定的 G，$P(G,k)$ 是 k 的一元函数，定义域是自然数集合 N。

由定义可知：

(1) $P(G,k)>0$ **的充要条件是** $\chi(G)\leqslant k$。

(2) $\varepsilon(G)=0$ 时，$P(G,k)=k^{\nu}$。

(3) $G=K_{\nu}$，则 $P(G,k)=k(k-1)\cdots(k-\nu+1)$。

例如，$P(k_3,3)=3(3-1)(3-2)=6$（图9.8），即用三种颜色对标志的三角形正常顶着色，共有 6 种不同的上色方式。

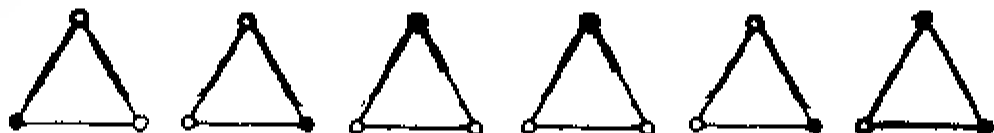


图 9.8

定理 7 G **是单图，任取一边** $e\in E(G)$，**则**

$$P(G,k)=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k)。$$

证 设 $e=uv$，考虑用 k 种颜色对 $G-e$ 着色，

(1) 当 u 与 v 同色时，上色方式的数目恰为 $P(G\cdot e,k)$。

(2) 当 u 与 v 异色时，上色方式的数目恰为 $P(G,k)$。

由 (1) 与 (2) 得

$$P(G-e,k)=P(G\cdot e,k)+P(G,k),$$

故得

$P(G,k)=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k)$。**证毕。**

利用定理 7 给出的公式可以递推地求得一些小图的 $P(G,k)$。图 9.9 给出了四顶星用 k 种颜色上色时，不同上色方式的数目是 $k(k-1)^3$；四阶圈（四边形）的上色方式有 $k(k-1)\cdot(k^2-3k+3)$ 种。

这两个图的 $P(G,k)$ 都是多项式，事实上，这并非偶然。

定理 8　$P(G,k)$ 是 k 的 ν 次多项式，且 (1) 首项为 k^ν；(2) 第二项为 $-\varepsilon k^{\nu-1}$；(3) 常数为零；(4) 系数皆整数，且正负交错出现。

证　对 ε 进行数学归纳法证明。不妨设 G 为单图，$G\cdot e$ 中有重边时，只保留重边中的一条边。$\varepsilon=0$ 时，$P(G,k)=k^\nu$，定理成立。假设 $\varepsilon\leqslant m-1$ 时定理已成立。考虑 $\varepsilon=m$ 的情形，由归纳法假设，

$$P(G-e,k)=k^\nu-(\varepsilon-1)k^{\nu-1}+\sum_{i=1}^{\nu-2}(-1)^{\nu-i}a_ik^i,$$

$$P(G\cdot e,k)=k^{\nu-1}-\varepsilon' k^{\nu-2}+\sum_{i=1}^{\nu-3}(-1)^{\nu-i-1}b_ik^i.$$

其中 ε' 是 $G\cdot e$ 的边数，a_i,b_i 是非负整数。由定理 7，

$$\begin{aligned}P(G,k)&=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k)\\&=k^\nu-\varepsilon k^{\nu-1}+(\varepsilon'+a_{\nu-2})k^{\nu-2}+\sum_{i=1}^{\nu-3}((-1)^{\nu-i}a_i\\&\quad+(-1)^{\nu-i}b_i)k^i=k^\nu-\varepsilon k^{\nu-1}+(\varepsilon'+a_{\nu-2})k^{\nu-2}\\&\quad+\sum_{i=1}^{\nu-3}(-1)^{\nu-i}(a_i+b_i)k^i.\end{aligned}$$

证毕。

定理 8 告诉我们 $P(G,k)$ 是多项式，今后我们称 $P(G,k)$ 为**颜色多项式**；颜色多项式是 1912 年 Birkhoff 冲击 4CC 时引入

的，用颜色多项式来表述四色猜想就是：

$$= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = k(k-1)^3$$

$$= k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) + k(k-1) = k(k-1)(k^2-3k+3)$$

图 9.9

任意的平面图G，皆有$P(G,4)>0$。

如今四色猜想已被证明。所以，如果图G的颜色多项式$P(G,k)=P_1(k)(k-4)$时，其中$P_1(k)$是k的$\nu-1$次多项式，则$P(G,4)=0$，于是可以断言G非平面图。平面图的颜色多项式不会有大于3的实根。

若$G_1,G_2,\cdots,G_\omega$是G的连通片，则显然有

$$P(G,k)=\prod_{i=1}^{\omega}P(G_i,k)。$$

颜色多项式的缺点之一是它与图不一一对应；同构的两个标志图，其颜色多项式当然相等，但两个图的颜色多项式相等时，两图未必同构。这一点从下面的定理可以看得出来。

定理 9 **G是树的充要条件是$P(G,k)=k(k-1)^{\nu-1}$。**

证 若$P(G,k)=k(k-1)^{\nu-1}$，这时颜色多项式中有1次项，由$P(G,k)=\prod_{i=1}^{\omega}P(G_i,k)$知$\omega=1$，即$G$是连通图；又$k(k-1)^{\nu-1}$的$\nu-1$次项的系数是$-(\nu+1)$，即$\varepsilon=\nu-1$，故$G$是树。

若G是树，我们用关于ν的数学归纳法来证明$P(G,k)=k(k-1)^{\nu-1}$。事实上$G=T$是树，$\nu=1$时，$P(T,k)=k$，$\nu=2$时，$T=K_2$，$P(T,k)=k(k-1)$，定理成立。假设$\nu\leqslant n-1$时，$P(T,k)=k(k-1)^{\nu-1}$。设$v\in V(T)$，且v是叶，$\nu(T)=n$，考虑$T'=T-v$，由归纳法假设，$P(T',k)=k(k-1)^{n-2}$。然而，对T'的每一正常顶着色（限用k种颜色中的一些颜色），v的着色有$k-1$种选择而使T正常顶着色，故

$$P(T,k)=P(T',k)(k-1)=k(k-1)^{n-1}。$$

证毕。

ν顶的树，当$\nu\geqslant3$时，其中有不少不同构者，但它们的颜色多项式却是一致的。

关于颜色多项式，还有不少问题引人注意，例如：

（1）$k(k-1)^{\nu-1}$为颜色多项式的图都是树，推广地问：有相同颜色多项式的图若不同构，它们有什么共同点？

（2）如何判断一个多项式是否颜色多项式？

例如$k^4-3k^3+3k^2$满足定理8的首项系数为1，系数皆整数，正负交错地出现，无常数项，但它并不是颜色多项式。事实上，若它是图G的颜色多项式，G连通时，因$\varepsilon=3$，而$\nu=4$，故G是树，它的颜色多项式应为$k(k-1)^{\nu-1}=k(k-1)^3\neq k^4-3k^3+3k^2$；若$G$不连通，只能有是$G=K_3\cup K_1$，而这时$P(G,k)=P(K_3,k)\cdot P(K_1,k)=k(k-1)(k-2)k\neq k^4-3k^3+3k^2$。

（3）Read**猜想：$P(G,k)$中系数的绝对值先是严格单调上升，继而严格单调下降。**

至今尚无人证明或反驳Read猜想。

9.7 求色数的一个算法

求色数目前尚无好算法，即尚无有效算法，本节介绍一个算法，它对顶数较多的图不适用。

为得到色数的算法，我们首先讨论所谓规范k顶着色。

定义 6　图G的一个k顶着色$(V_1,V_2,\cdots,V_k)$，若V_i是$G-\bigcup_{j=1}^{i-1}V_j$的极大独立集，$i=1,2,\cdots,k$，$V_0=\varnothing$，则称这一k顶着色是规范k顶着色。

规范k顶着色是正常k顶着色。

定理 10　G是可以k顶正常着色的，则G存在k顶规范着色。

证　设$(V_1,V_2\cdots,V_k)$是G的一个正常k顶着色，若V_1是G的极大独立集，则把V_1各顶着以1色；不然，V_1是独立集，从$V-V_1$中调入某些顶进入V_1，可以使V_1扩张成极大独立集$V_1^{(1)}$；$V_2,V_3,\cdots,V_k$分别变成$V_2^{(1)},V_3^{(1)},\cdots,V_k^{(1)}$；考虑$G$

$-V_1^{(1)}$，若$V_2^{(1)}$ 是其极大独立集，则把$V_2^{(1)}$的顶着以2色；不然，从$G-V_1^{(1)}-V_2^{(1)}$中调一些顶进入$V_2^{(1)}$，使$V_2^{(1)}$扩张成$G-V_1^{(1)}$的极大独立集$V_2^{(2)}$。如此以往，最后可得G的规范k顶着色（$V_1^{(1)},V_2^{(2)},\cdots,V_k^{(k)}$），**证毕**。

当我们用一些颜色为一个图正常着色，首先用第一种颜色去上色时，尽可能扩大第一色顶的个数，认为这是“规范”的一种表现，即尽可能多“工作”。用第二种颜色上色时亦应本着尽可能多给一些顶上色的规范态度去做等等，所以名规范k顶着色。当然，规范k顶着色用的颜色数未必就是$\chi(G)$，而且规范着色未必唯一，由定理10，G可用$\chi(G)$种颜色正常顶着色，也必然存在$\chi(G)$规范着色；于是我们只需从一切规范着色中挑选所用颜色最少者，其所用颜色即为所求的$\chi(G)$。

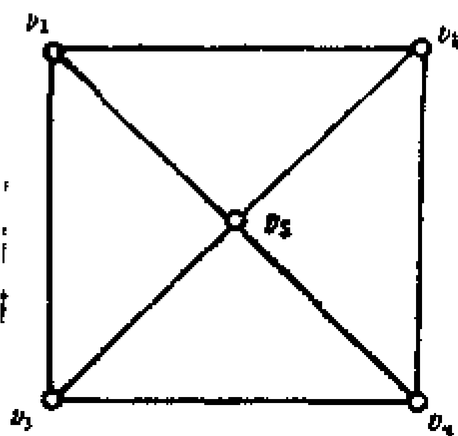


图 9.10

例如图9.10中的极大独立集共计三个：$\{v_5\}$，$\{v_1,v_3\}$，$\{v_2,v_4\}$。所以G的规范着色是唯一的：（$\{v_5\}$，$\{v_1,v_3\}$，$\{v_2,v_4\}$），故得$\chi(G)=3$。

这里介绍的规范着色的方法求色数其实需要求极大独立集以及一切规范着色，这对于大图，因为计算量过大而成为实际上不可完成的解法，所以是一个坏算法。

着色问题的理论与应用，内容之丰富，之精彩，使它成了图论中的重要篇章。4色定理尚欠理论性证明，此外，还有一些猜想（例如Read猜想）亦未被证明或反驳；我们用时间表之编排及F*D-CCAD问题为范例来说明如何把实际问题化为染色问题，读者应当增强用着色思想考虑实际问题的观念。

本章的要点是

（1）$\chi(G)$，$\chi'(G)$，$\chi^*(G)$的定义与联系。

（2）χ'（二分图）$=\Delta$，χ'（单图）$=\Delta$或$\Delta+1$，$\chi(G)\leqslant\Delta+1$。

（3）颜色多项式的定义和求法。

（4）四色定理与五色定理。

（5）把时间表问题及 F*D CCAP 化成着色问题。

习　　题

1．χ'（Petersen 图）$=4$。

2．怎样求二分图的正常 Δ 边着色？

3．G是二分图，$\delta>0$，则G有一个δ边着色，在G的任一顶处均有δ个颜色出现。

4．$\chi(K_{2n-1})=\chi'(K_{2n})=2n-1$。

5．G是正则图，ν是奇数，$\varepsilon\neq0$，则$\chi'(G)=\Delta+1$。

6．G是无环单图，$\nu=2n+1$，$\varepsilon>n\Delta$，则$\chi'=\Delta+1$。

7．图G中任意两个正常k边着色对边集合的色划分一致，则称G是唯一正常k边着色图；证明唯一3边正常染色3次正则图是Hamilton图。

8．学校里有7名教师，12个班，每周五天教学，教课要求由下面矩阵给出：

$$
P=\begin{array}{cccccccccccc|c}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & \\
3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & x_1\\
1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 & x_2\\
5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & x_3\\
2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & x_4\\
3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 & x_5\\
5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 & x_6\\
0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 & x_7
\end{array}
$$

其中p_{ij}是教师x_i教y_j班的节数，试问：

（1）一天应分几节课？

(2) 若每天上8节课，需要几间教室？

9. 证明：

(1) $r_n < n(r_{n-1}-1)+2$.

(2) $r_n \leqslant [n!e]+1$.

(3) $r_3 \leqslant 17$.

10. G是无环图，则存在Δ正则图，使G为其子图。

11. 单图G与H之积$G\times H$是下面的图：其顶集为$V(G)\times V(H)$，(u,v)与(u',v')相邻的充要条件是$u=u'$，$vv'\in E(H)$或$v=v'$，$uu'\in E(G)$. 试证明：

(1) $\chi'(G\times K_2)=\Delta(G\times K_2)$.

(2) H是一个非平凡图，且$\chi'(H)=\Delta(H)$，则$\chi'(G\times H)=\Delta(G\times H)$.

12. 写出一个在单图上$\Delta+1$正常顶着色的算法。

13. $\delta(G)>1$，G是单图，则存在$\delta-1$边着色，使G的每顶处出现$\delta-1$种颜色。

14. s_n是满足下列条件的最小整数：把$\{1,2,\cdots,s_n\}$划分成n个子集，总存在一个子集，其中有$x+y=z$的解，证明

$$s_1=2,\ s_2=5,\ s_3=14.$$

15. $s_n \geqslant 3s_{n-1}-1$.

16. $s_n \geqslant \frac{1}{2}(3^n+1)$.

17. $s_n \geqslant \frac{1}{2}(27(3)^{n-3}+1)$.

18. 一个国际社团，由六个国家的1976人组成，对每个人任编一号码，但号码从1编到1976，则定有一人，其号码是其某同胞号码之2倍或某两同胞号码之和。又

(1) 把1976改成1958，命题是否仍成立？

(2) 若只有364名人士时，可以有一编号方法，使上述同胞号码关系不出现。

(3) 把6国推广成n国($n\geqslant 6$)，问至少多少位人士参加才能发生题中所述的同胞号码关系？又问至多多少人士参加时，才可设法避免那种同胞号码关系？

19. G是单图，则$\chi(G)\geqslant\frac{v^2}{v^2-2\varepsilon}$.

20. G中任二奇圈皆有公共顶，则$\chi\leqslant 5$.

21. G的次数列为$d_1,d_2,\cdots,d_v$，且$d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_v$，则$\chi\leqslant\max_i\min\{d_i+1,i\}$.

22. $\varepsilon>0$，则$\chi\leqslant\{(2\varepsilon)^{1/2}\}$.

23. $\chi(G)+\chi(G^c)\leqslant v+1$.

24. 仅有的1色临界图是K_1，仅有的2色临界图是K_2，而仅有的3色临界图是k阶奇圈．k是不小于3的奇数

25. 求图9.11中两个图的颜色多项式.

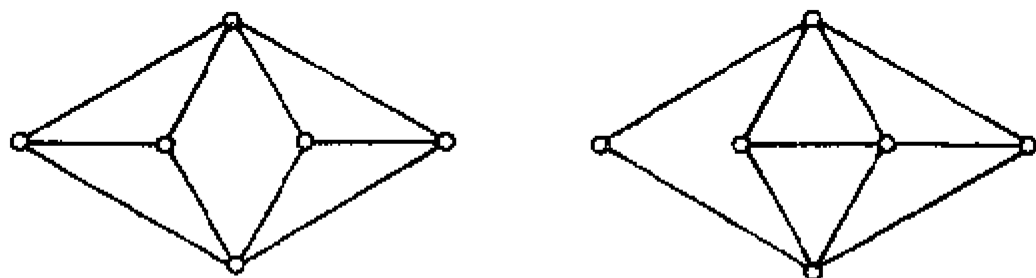


图 9.11

26. $P(C_n,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$，其中$C_n$是$n$阶圈.

27. $P(G,k)=k(k-2)^n+(-1)^n k(k-2)$，其中$G$为$n+1$顶轮.

28. $G\cap H$是完全图，其中G与H是单图，则

$$P(G\cup H,k)\cdot P(G\cap H,k)=P(G,k)\cdot P(H,k).$$

29. $P(G,k)=0$的实根不大于v.

30. χ(n维立方体)$=$？χ'(n维立方体)$=$？

31. 图G的颜色多项式为$P(G,k)=(k-5)P_1(k)$，其中$P_1(k)$是k的$v-1$次多项式，问G是否平面图？为什么？

32．证明：若图G满足下列条件之一，则G是第二类的图：

(1) $\nu=\text{odd}$，且$\sum_{v\in V}[\Delta-d(v)]<\Delta$。

(2) $\nu=\text{odd}$ 的正则图。

(3) 含割顶的正则图。

(4) G是从 $\nu=\text{odd}$ 的正则图中删去不多于$\frac{\Delta}{2}-1$条边得到的图。

(5) G是从 $\nu=\text{even}$ 的正则图中一条边被剖分得到的图。

10 有 向 图

10.1 有向图的连通性

有向图的概念以及有向道路、有向轨、有向圈等概念，我们前面介绍过，本章要深入研究这些概念的性质和应用。

定义 1 把有向图的各边的方向去掉，所得的无向图叫做该有向图的底图；有向图G之底图是连通图时，此有向图称为弱做通有向图．对于有向图G的顶$u,v\in V(G)$，存在有向轨$P(u,v)$时，称u可达v；任取$u,v\in V(G)$，u可达v或v可达u时，存G是单连通有向圈；任取$u,v\in V(G)$，不但u可达v，圈且v可达u时，称G为强连通有向圈．

定理 1 G是强连通有向图的充圈条件是G的一切顶在一个有向回路上．

证 设G是强连通有向图，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$，则存在有向轨$P_1(v_1,v_2),P_2(v_2,v_3),\cdots,P_{\nu-1}(v_{\nu-1},v_\nu)$，$P_\nu(v_\nu,v_1)$，于是$\bigcup_{i=1}^{\nu}P_i$即为含一切顶的有向回路．反之，若$G$之一切顶共处于一个有向回路上，则任取$u,v\in V(G)$，存在有向轨$P_1(u,v)$与$P_2(v,u)$，故$G$是强连通有向图．**证毕．**

定理 2 有向图G为单连通圈的充要条件是G中存在有向生或道路．

证 充分性不足道．

下证必要性．已知有向图G是单连通的，任取定$V_1\subseteq V(G)$，总存在一个顶$v_1\in V_1$，对任何$v\in V_1$，使得v_1可达v；不然的话，

必有一个最小的无此性质的顶子集$U=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$，在$U-\{v_k\}$中存在一个顶v，对任意的$u\in U-\{v_k\}$，v可达u。由此知，在U中只能是v不能达v_k，同时v_k不可达v，这与G是单连通有向图相违。**证毕.**

定理 3　无向图G可定向成强连通图的充要条件是无向图（底图）G是2边连通图。

证　若无向图G可定向成强连通图，则G中无桥，不然桥的两端点在定向后的有向图中不能彼此可达，与强连通的定义相违。所以G是2边连通图。

反之，若G是2边连通的无向图，它无桥，存在一个圈G_1；我们构作G的连通子图序列$G_1,G_2,\cdots$；若G_i（$i=1,2,\cdots$）不是生成子图，设v_i不是G_i中的顶，而$v_i\in V(G)$，则找到两个无关公共边的轨P_i，Q_i（见第3章习题9）；P_i，Q_i的一端是v_i，另一端在G_i中，这时，令$G_{i+1}=G_i\cup P_i\cup Q_i$。又因$|V(G)|<+\infty$，故这一序列必然到某一生成子图$G_n$为止。我们给$G_n$定向：首先把$G_1$定向成有向圈，$P_i$定向成起点在$v_i$的有向轨，$Q_i$定向成终点在$v_i$的有向轨，于是每个$G_i$，进而$G_n$有了定向，且显然$G_n$是强连通有向图。把不在$G_n$上的$G$之边任意定向，则得以$G$为底图的有向图，且是强连通有向图。**证毕.**

定理3的实际背景是：什么样的公路网，为减少车祸和交通阻塞，可以规定单向行驶方向，且保证运输畅通？这不总是办得到的，例如图10.1就办不到。

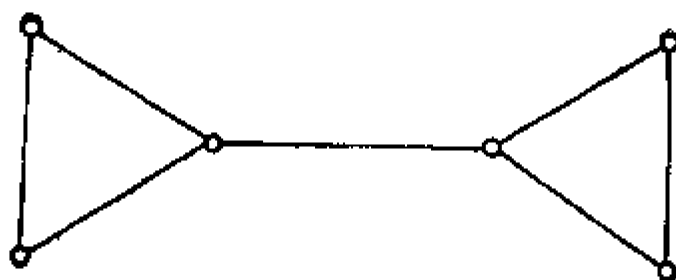


图 10.1

办不成的原因是它的图上有一个桥。定理 3 构造性地指出仅当无桥时可以规定单向行驶方向。

10.2 有向Euler图

与第 4 章相应地可以定义有向 Euler 图。有向图中含每条边的有向行迹叫做**有向 Euler 行迹**；有向图中含每条边的有向回路叫做**有向 Euler 回路**；含有向 Euler 回路的有向图叫做**有向 Euler 图**。直观地讲，有向 Euler 图是从一顶出发，顺着箭头指示的方向走，可以走过每条边恰一次又返回出发点的那种图。下面给出有向 Euler 图的特征性描述。

定理 4 **G 是弱连通有向图，则下述命题等价：**

(1) G 中含有向 Euler 回路。

(2) $\forall v \in V(G)$，$d^-(v) = d^+(v)$。

(3) $G = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$，其中 C_i 是有向圈，且 $E(C_i) \cap E(C_j) = \varnothing$，$1 \leqslant i < j \leqslant n$，$n$ 为某个自然数。

定理 4 的证明与第 4 章定理 1 证明相似。当证明 (2)→(3) 时，首先证明 G 中有有向圈 C_1。为此，考虑 G 中的最长有向轨 $P_0(u,v)$，因 $d^+(v) = d^-(v)$，所以有一条边 e，e 的尾是 v，e 的头必在 $P_0(u,v)$ 上，于是产生了有向圈。其它推导与第 4 章定理 1 雷同。

定理 5 **G 是弱连通有向图，且满足**

$$d^-(v) = \begin{cases} d^+(v), & v \neq u_1, u_2, u_1, u_2, v \in V(G); \\ d^+(v) - 1, & v = u_1; \\ d^+(v) + 1, & v = u_2, \end{cases}$$

则 G 中有以 u_1 为起点以 u_2 为终点的有向 Euler 行迹。

定理 5 的证明与第 4 章定理 2 相似。

下面介绍如何用有向 Euler 图的概念设计**有效磁鼓**。一个

磁鼓，实际上相当于把一个曲面分割成 2^n 部分，每一部分或由导体或由绝缘体组成。图10.2接触器的位置表示一个2进制数010，当磁鼓顺时针转动一格后，得101；再转一格得010，这就不好了，这个状态与开始的状态无法区别。

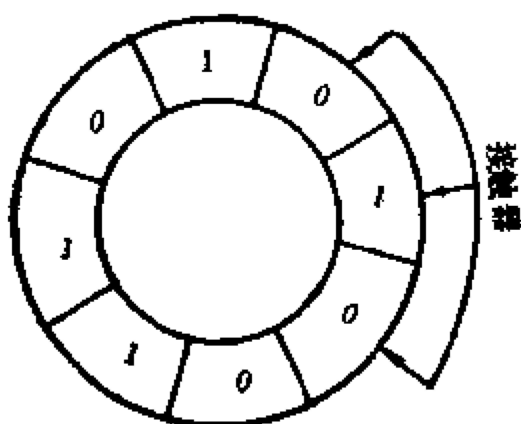


图 10.2

一般地，设计一个磁鼓，即将鼓面划分成 2^n 个格子，在每个格子上分配数字0或1，但必须满足"不重复，不遗漏"的条件。

（1）不重复　即相继的 k 个接触器随着鼓的转动所读出的 2^n 个 k 位二进制数要两两相异。为此必须 $2^k \geqslant 2^n$。

（2）不遗漏　即 2^k 个不同的 k 位二进制数，每个都对应鼓的某一状态，为此，$2^k \leqslant 2^n$。

所以必须 $k=n$。

$k=n$ 的不重复、不遗漏的磁鼓叫做有效磁鼓，图10.2中的磁鼓不是有效磁鼓，它不满足条件（1）与（2）。

对于任给的 $k=n$，怎样设计一个有效磁鼓？Good用有向Euler回路解决了这一问题。

构作有向图 G_n：$p_i \in \{0,1\}$，$i=1,2,\cdots,n$。

$$V(G_n)=\{p_1p_2\cdots p_{n-1} \mid p_i=0 \text{ 或 } 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\},$$

$\forall v_1, v_2 \in V(G_n)$，

$$v_1v_2 \in E(G_n) \Longleftrightarrow v_1=p_1p_2\cdots p_{n-1},\ v_2=p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n,$$

记 $v_1v_2=p_1p_2\cdots p_{n-1}p_n$。

容易看出，$\forall v \in V(G_n)$，则 $d^-(v)=d^+(v)=2$。事实上，若 $v=p_1p_2\cdots p_{n-1}$，则恰有两个边 a_1, a_2 以 v 为头，恰有两个边 a_3，a_4 以 v 为尾。

$$a_1=(0p_1p_2\cdots p_{n-2}, v),\quad a_2=(1p_1\cdots p_{n-2}, v).$$

$$a_3=(v, p_2p_3\cdots p_{n-1}0),\quad a_4=(v, p_2p_3\cdots p_{n-1}1).$$

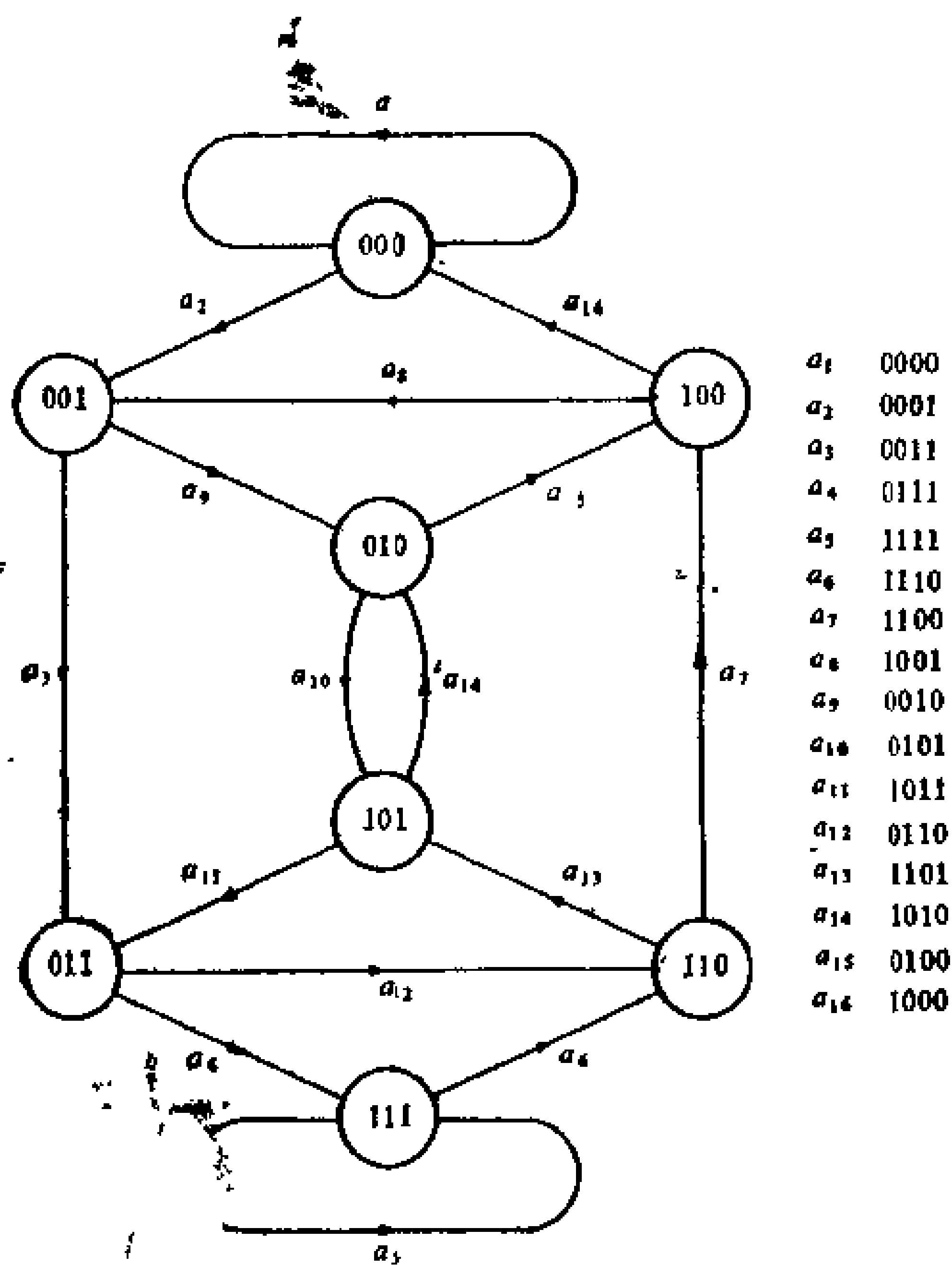

000
001
100
010
101
011
110
111
a_1 0000
a_2 0001
a_3 0011
a_4 0111
a_5 1111
a_6 1110
a_7 1100
a_8 1001
a_9 0010
a_{10} 0101
a_{11} 1011
a_{12} 0110
a_{13} 1101
a_{14} 1010
a_{15} 0100
a_{16} 1000

图 10.3(a)

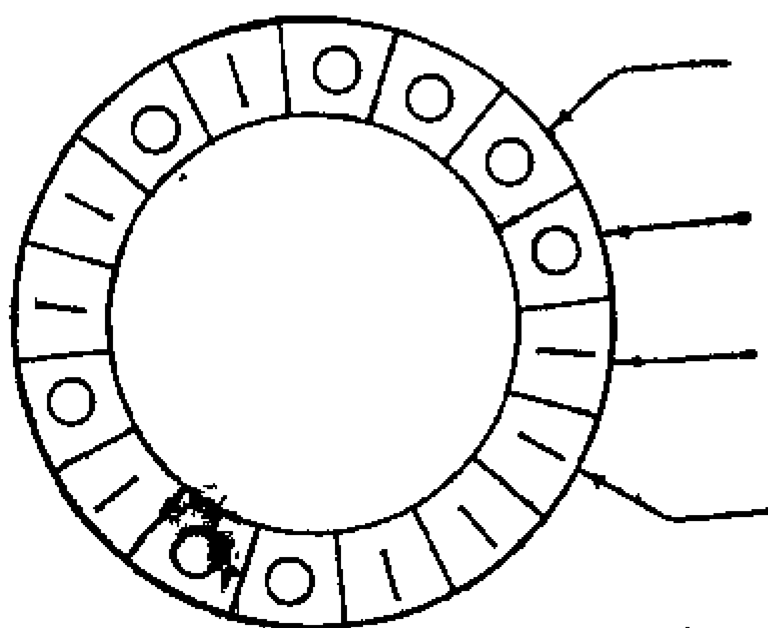


图 10.3(b)

由定理4，G_n是有向Euler图，沿G_n的有向Euler回路每边取其第一位数字，所得0，1数字串顺次抄入2^n个格子便完成了有效磁鼓之设计．图10.3给出$n=k=4$时的有效磁鼓及相应的G_4．

10.3 有 向 轨

任给一个有向图，它上面有向轨的长度与其底图上轨之长度一般没有多大关系．例如图10.4中，有向轨最长者长为1，而相应的底图上却有长16的轨，但多少有些出乎意料地，有向图上的有

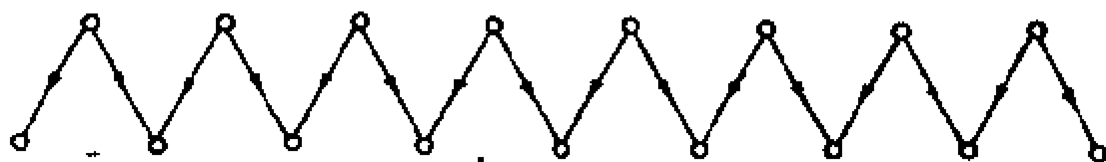


图 10.4

向轨的长度却与其底图的色数有非常密切的关系．

定理 6　以G为底图的有向图中必有长$\chi(G)-1$的有向轨．

证　设E'是使有向图G'（仍以G表示以 为底图的有向图）不含有向圈的最小边子集，其中$G'=G-$　　又设G'中最长的有向轨长为k．把颜色1，2，…，$k+1$　　G'的顶，当以v为起点的G'内的有向轨最大长度是$i-1$　　v着以i色．用V_i表示i色顶的集合，下证（$V_1, V_2,$　　）是G的正常$k+1$顶着色．

首先看到，G'中任一有向轨的起点与终点异色．事实上，若$P(u,v)$是G'的一条有向轨，设$v\in V_i$，则有有向轨$Q=vv_2v_3\cdots v_i\subset G'$．又$G'$中无有向圈，则$P(u,v)\cup Q$是起点为$u$长至少为$i$的有向轨，于是$u\in V_i$．

再证G的任一边头尾异色．设$uv\in E(G)$，若$uv\in E(G')$，则uv是G'的有向轨，u与v异色；若$uv\in E'$，由E'的最小性，$G'+uv$含有向圈C，$C-uv$是G'的一条有向轨，故u与v亦异

色.至此证得$(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$是G的正常$k+1$顶着色,故$\chi(G)\leqslant k+1$,$k\geqslant\chi(G)-1$,即G中有长$\chi(G)-1$的有向轨。**证毕.**

我们称K_v定向后的有向图为**竞赛图.**

推论 1　竞赛图中有有向Hamilton 轨（含一切顶的有向轨）.

证　$\chi(\vec{K_v})=v$，故竞赛图中有长$\chi(K_v)-1=v-1$的有向轨，所以它含v个顶的有向轨，即含有向Hamilton 轨。**证毕.**

图 10.4 中最长轨长是 1，而色数为 2．符合定理 6．定理 6 的$\chi(G)-1$不能再增大，在某种意义上讲，它给出了一个最好的上界。每个无向图，都可以有一个适当定向，使得到的有向图中最长轨恰为长$\chi(G)-1$的轨：若$(V_1,V_2,\cdots,V_{\chi(G)})$是$G$的正常$\chi(G)$顶着色，当$u\in V_i$，$v\in V_j$时，且$i<j$，$uv\in E(G)$，则把$uv$边定向成有向边$uv$，它以$u$为尾，于是没有有向轨能含$\chi(G)$个顶，故由定理 6，最长轨长$\chi(G)-1$。

定义 2　G是有向图，当$uv\in E(G)$时，称尾u为头v的内邻顶，v为u的外邻顶；v的内邻顶集合记成$N^-(v)$,v的外邻顶集合记为$N^+(v)$.

定理 7　G是无环有向图，则底图中有一个独立集S，使得$V(G)-S$中的每个顶可通过长度至多是 2 的有向轨由S内的顶达到.

证　对v进行归纳法证明.

$v=1$时，定理自然成立。假设顶数比v少的有向图，定理已成立，今考虑顶数为v的有向图G。任取$v\in V(G)$，令$G'=G-(\{v\}\cup N^+(v))$，由归纳法假设（不妨设$V(G')\neq\varnothing$）存在G'的一个独立集S'，G'中不在S'中的顶可由S'中的顶经至多长 2 的有向轨达到，若v是S'的某顶u之外邻顶，那么$N^+(v)$的每个顶可由u通过至多长 2 的有向轨达到，这时，定理成立．若v不是S'中任何顶的外邻顶，于是v不与S'中的任何顶邻接，那么独立集$S=S'\cup\{v\}$满足定理的要求．**证毕.**

推论 2　竞赛图中含有一顶，从该顶通过长至多为 2 的有向轨可以到达任何顶。

证　由于 K_v 的最大独立集为一个顶构成，由定理 7，推论 2 成立。**证毕。**

我们称推论 2 中的那种可以通过至多长 2 的有向轨达到任何顶的顶为竞赛图中的**"王"**。"王"未必唯一，例如图10.5中的竞赛图有三个王，它们是大三角形的三个顶点，它们都是 $d^+(v)$ 最大的顶。

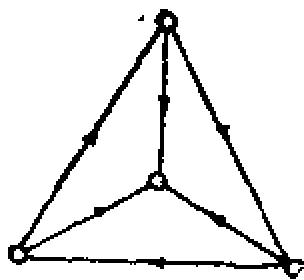


图　10.5

作为本节的结束，我们讲一个有向轨的重要应用，即**工作的最佳排序问题**：今有工作 $J_1, J_2, \cdots, J_n$，要在同一台机器上进行，从 J_i 到 J_j 的机器调整时间为 t_{ij}，试把 n 项工作排队，使得 $\sum t_{ij} = \min$。这个问题至今仍无有效算法，我们这里给一个近似算法。

(1) 以 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为有向图 G 的顶集，当且仅当 $t_{ij} \leqslant t_{ji}$ 时，做有向边 v_iv_j。于是得到的有向图中含生成竞赛图。

(2) 在有向图 G 中求出有向 Hamilton 轨，依此 Hamilton 轨上顶的顺序来安排工作顺序。

例 1　设机器调整矩阵为

$$T = \begin{array}{c} \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 & J_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

求这六项工作如何安排工序，使总加工时间最少？

解 构作有向图G（图10.6），以$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$为顶集，当且仅当$t_{ij}\leqslant t_{ji}$时，连一有向边$v_iv_j$。

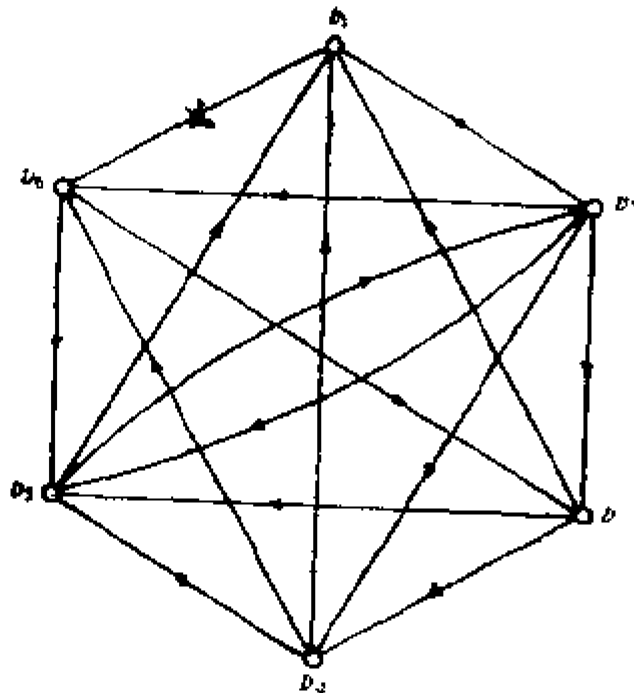


图 10.6

从图G中求得一条有向Hamilton轨为

$v_1v_6v_3v_4v_5v_2$，

所需调机时间为（以$J_1J_6J_3J_4J_5J_2$为序）

$1+2+1+1+3=8$。

若用自然顺序$J_1J_2J_3J_4J_5J_6$，则所需调机时间为

$$5+1+1+1+5=13。$$

10.4 有 向 圈

G是有向图，S与T是$V(G)$的子集，$(S,\ T)$表示尾在S头在T的边集合。

定理 8 **$v\geqslant3$的强连通竞赛图的每一顶都含于某有向k阶圈上，其中$k=3,4,5,\cdots,v$。**

证 设G是强连通竞赛图，u是G的任意一个顶．取$S=N^+(u)$，$T=N^-(u)$。我们来证明u在G的三阶圈上（图10.7）。事实上，由于G是强连通竞赛图，S与T皆非空，且$(S,T)\neq\varnothing$，故有边vw，$v\in S$，$w\in T$，于是u在三角形$uvwu$上，它是一个3阶有向圈。

下面用对k的归纳法证明之。假设u在某长为$3,4,\cdots,n$的有向圈上，这里$n<v$，考虑u是否在某个长$n+1$的圈上．设$C=v_0v_1v_2\cdots v_n$是一个n阶圈，且$u=v_0=v_n$。若存在$v\in V(G)-V(C)$，v是尾在C上的一边的头，又是头在C的一边之尾，

那么C上有顶v_i，v_{i+1}，使得v_iv，$vv_{i+1}\in E(G)$，于是u在$n+1$阶圈$v_0v_1\cdots v_ivv_{i+1}v_{i+2}\cdots v_n$上。否则，用$S$表示$V(G)-V(C)$中与$C$连接的边们的头集合，$T$表示这些边的尾集合（图10.8）。由于$G$是强连通竞赛图，故$T\neq\varnothing$，$S\neq\varnothing$，$(S,T)\neq\varnothing$。存在$v\in S$，$w\in T$，使得$vw\in E(G)$，故$u$在$n+1$阶圈$v_0vwv_2v_3\cdots v_n$上。**证毕。**

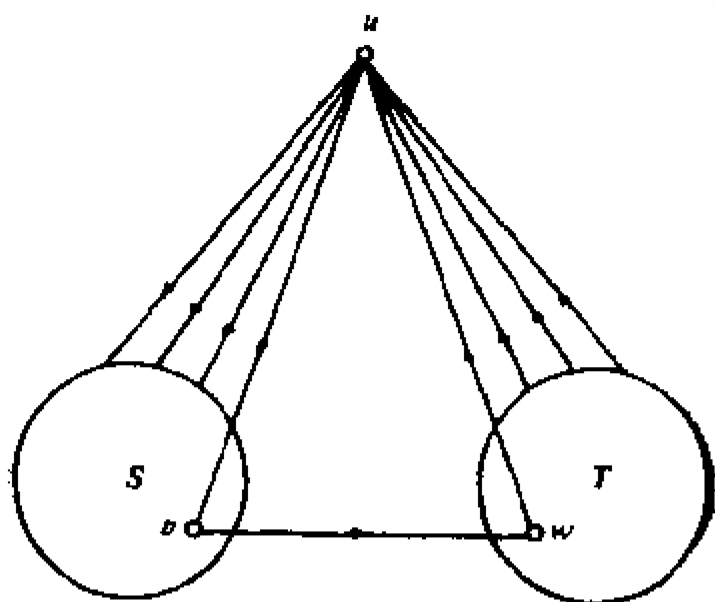


图 10.7

推论 3 G**是强连通竞赛图的充分必要条件是**G**中有生成有向圈。**

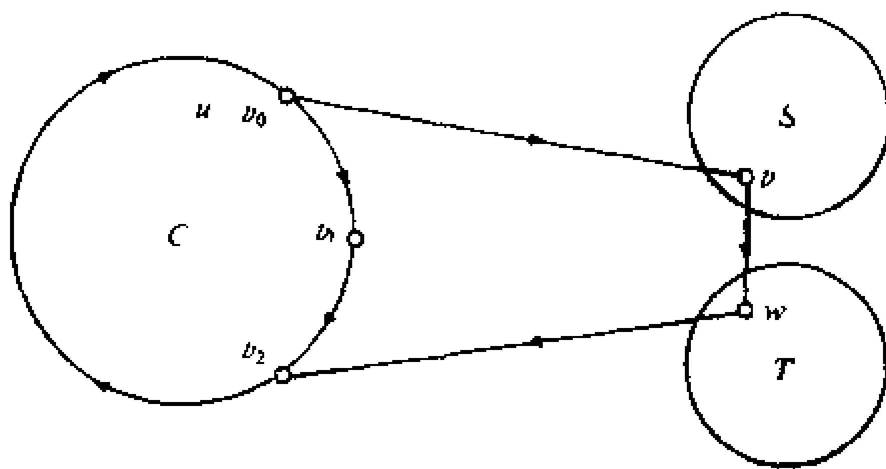


图 10.8

以后，我们称生成有向圈为**有向**Hamilton**圈**，含有向Hamilton圈的有向图叫做**有向**Hamilton**图。**

下称无环亦无端点相同、方向相同的边之有向图为**严格有向图。**

引理 1 G**是严格有向图，则**G**有长度不小于**$\max\{\delta^-,\delta^+\}$

的有向轨，其中$\delta^-=\min\limits_{v\in V(G)}\{d^-(v)\}$，$\delta^+=\min\limits_{v\in V(G)}\{d^+(v)\}$。

证 不妨设$\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^+$，不然可以考虑$G$的反向图，即把$G$之各边定向反过来得到的有向图$G'$，在$G$与$G'$中对应的有向轨的长度一致。设$P(u_0,v_0)$是$G$中最长的有向轨，若$P$的长度小于$\delta^+$，由于$G$是严格有向图，必有尾为$v_0$而头不在$P$上的边，从而$P$可以延长，与$P$之最长性相违，故$P(u_0,v_0)$的长不小于$\delta^+=\max\{\delta^-,\delta^+\}$。**证毕。**

引理 2 **G是严格有向图，且$\max\{\delta^-,\delta^+\}=k>0$，则$G$中有长度不小于$k+1$的有向圈。**

证 不妨设$\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^+$，$G$中一条最长轨为$P(u_0,v_0)$，其长不小于$k>0$，由于$G$是严格有向图，从而应有$d^+(v_0)$条以$v_0$为尾的边，这些边的头两两相异。又$d^+(v_0)\geq k$，由$P(u_0,v_0)$的最长性，这些以$v_0$为尾的边之头皆在$P$上，故$G$中含长度不小于$k+1$的有向圈。**证毕。**

定理 9 **G是严格有向图，且**

$$\min\{\delta^-,\delta^+\}\geq\frac{v}{2}>1,$$

则G是有向 Hamilton 圈。

证 设G是满足定理条件但不含有向 Hamilton 圈的图，G中最长有向圈长为l，$C=v_1v_2\cdots v_lv_1$是G的一个长l的有向圈。由引理 2，G中有长度不小于$\frac{v}{2}+1$的有向圈，故$l>\frac{v}{2}$。令$P(u,v)$是$G-V(C)$中最长有向轨，其长为m（图10.9）。显然，

$$v\geq l+m+1.$$

又因$l>\frac{v}{2}$，得

$$m<\frac{v}{2}. \tag{1}$$

令

$$S=\{i\mid v_{i-1}u\in E(G)\},$$
$$T=\{i\mid vv_i\in E(G)\}.$$

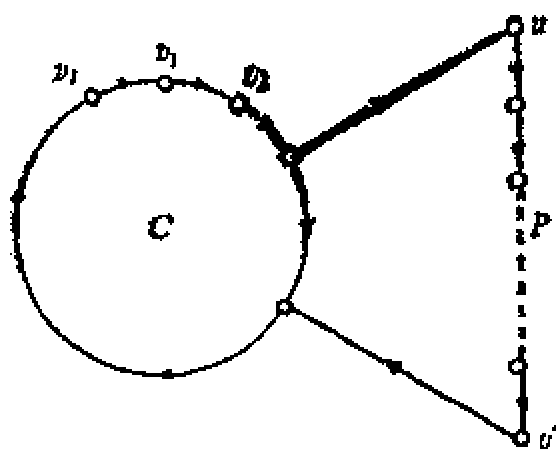


图 10.9

首先证明 $S\cap T=\varnothing$。事实上，令 $C_{j,k}$ 是 C 上起于 v_j 止于 v_k 的部分。若某个 i 在 $S\cap T$ 之内，则 G 中就含有长 $l+m+1$ 的有向圈 $C_{i,i-1}v_{i-1}uP(u,v)vv_i$，与 C 是 G 的最长圈矛盾。故知

$$S\cap T=\varnothing \qquad (2)$$

因 $P(u,v)$ 是 $G-V(C)$ 中最长有向轨，故有

$$N^-(u)\subseteq V(P)\cup V(C).$$

但在 C 上 u 的内邻顶个数为 $|S|$，于是，

$$d_G^-(u)=d_P^-(u)+|S|.$$

又因 $d_G^-(u)\geqslant\delta^-\geqslant\frac{v}{2}$，且 $d_P^-(u)\leqslant m$，故有

$$|S|\geqslant\frac{v}{2}-m. \qquad (3)$$

相似地有

$$|T|\geqslant\frac{v}{2}-m. \qquad (4)$$

由 (1) 知 $S\neq\varnothing$，$T\neq\varnothing$。由 (3)、(4) 及 $v\geqslant l+m+1$，得

$$|S|+|T|\geqslant l-m+1. \qquad (5)$$

故由 (2) 得

$$|S\cup T|\geqslant l-m+1. \qquad (6)$$

又 $S\neq\varnothing$，$T\neq\varnothing$，也不交，故存在自然数 i，k，使得 $i\in S$，$i+k\in T$，且

$$i+j\notin S\cup T,\ 1\leqslant j<k. \qquad (7)$$

这里的运算在 mod$l$ 意义下进行．由 (6) 与 (7) 知 $k\leqslant m$．故 $C_{i+k,i-1}v_{i-1}uPvv_{i+1}$ 是有向圈，长 $l+m+1-k$，比 C 还长，矛盾．**证毕．**

有向图的理论非常之多，本章只就有向轨、有向圈、有向 Euler 图与有向 Hamilton 图等方面进行了较为深入的讨论，并指出有向图与其底图之间在上述几方面虽有相似之处，但更有许多显著的区别．例如有向 Euler 图的充要条件是图可表成无公共边的有向圈之并，与无向 Euler 图的充要条件为图可表成无公共边的圈之并是相似的；但谈到次数的条件，连通无向图为 Euler 图的充要条件是每顶皆偶次，而弱连通有向图为 Euler 图的充要条件是 $d^+(v)=d^-(v)$ 对每个 $v\in V(G)$ 成立，两者有明显区别；又如有向图中轨的长度，简直与底图中轨的长度不相关，却与似乎不相关的色数有密切关系，表现了定向后图的性质与其底图有时会有极大的偏离．

有向图还有一个特有的方向对偶性原则．

方向对偶原则：对每个关于有向图的定理，有一个相应的定理，它是由第一个定理中的每个概念代之以反向的概念得到的．

例如，有向图G的底图中无圈，则存在 $v\in V(G)$，使得$d^+(v)=0$．这个命题是成立的，因为若 $P(u,v)$ 是G中的最长有向轨，则 $d^+(v)=0$．

应用方向对偶原则，可以得出下面的一个正确的命题：

有向图G底图中无圈，则存在 $v\in V(G)$，使得 $d^-(v)=0$．

又例如，一个弱连通有向图是一个外向树的充要条件是恰有一顶 v_0，$d^-(v_0)=0$，而对于其余的顶 v，皆有 $d^-(v)=1$．

这个命题显然是正确的，由它及方向对偶性原则，可得下面的正确命题：

一个弱连通有向图是内向树的充要条件是恰有一顶 v_0，$d^+(v_0)=0$，而对于其余的顶 v，$d^+(v)=1$．

本章的要点是：

（1）弱连通、单连通及强连通有向图的定义和单连通与强连通有向图的充要条件．

（2）有向 Euler 图的充要条件及有向“一笔画”的充分条件．

（3）有向图中的有向轨长度与色数的关系．

（4）竞赛图及其性质：存在“E”及有向 Hamilton 轨．

（5）强连通竞赛图的充要条件及其性质．

（6）有向 Hamilton 图的充分条件．

（7）有向图理论对于有效磁鼓及工序问题的应用．

习　　题

1．单图G可以有多少种不同的定向方式？

2．$\sum_{v\in V(G)} d^-(v) = \sum_{v\in V(G)} d^+(v) = \varepsilon(G)$，其中$G$是有向图．

3．有向图G中无有向圈，则$\delta^- = 0$，$\delta^+ = 0$．

4．G为强连通有向图的充要条件是其底图连通，且底图的每个块在G中强连通．

5．有向图G之逆是G的每边皆反向定向得到的有向图G'，证明：

（1）$(G')' = G$．（2）$d^+_{G'}(v) = d^-_G(v)$．（3）G'中u可达v的充要条件是在G中v可达u．

6．竞赛图是强连通有向图或只要改变一条边的方向就可变成强连通图．

7．G有一种定向方式，使得每条有向轨不长于Δ（底图的最大次数）．

8．G是满足下列条件的有向图：

（1）$d^+(x) - d^-(x) = d^-(y) - d^+(y) = l$，

（2）$d^+(v) = d^-(v)$，$v \in V - \{x, y\}$，

则G中有l条无公共边且以x为起点以y为终点的有向轨。

9．$V(G)$的每一非空真子集S，均有$|(S,\bar{S})|\geqslant k$，则称非平凡有向图G是k边连通有向图。证明：非平凡有向图G是强连通有向图的充要条件为它是1边连通有向图。

10．百种昆虫，两种之中必有一种能咬死另一种。证明可以将这一百种昆虫每种取一个虫子，再排成一个纵队，使得每个虫子能咬死紧跟在它后面的那个虫子。

11．n名棋手比竞，没有平局，也没有v_1胜v_2，v_2胜v_3，…，v_k胜v_1的现象，则必有一人在所有的比赛中全胜，也必有一人在所有的比赛中全负。

12．n（$n\geqslant3$）名棋手比赛，无平局，亦无一人全胜，则必有甲胜乙，乙胜丙，丙又胜甲的现象。

13．试设计$n=k=5$的磁鼓。

14．在Petersen图上设计单向行驶路线。

15．桌上两堆火柴，两人轮流从某一堆中取若干根火柴，每次只能从一堆中取，不能不取，没有火柴可取的人是输者。给出取胜策略。

16．一个有向图是本原的，若它的邻接矩阵A的某个幂的所有元皆正；试证：本原有向图G的充要条件是G为强连通图，且各个圈长的最大公约数为1．

11 网络中的最大流

11.1 Ford 和 Fulkerson 算法

把商品从产地运往市场，交通网上每个路段运输能力给定的条件下，设计一个运输方案，使得运输得最快。为解决上述问题，我们讨论下面相应的数学模型；当然，下面的数学模型不只适用于运输问题，而且也适用于很多其它实际问题。

有向加权图 G，指定两个顶 s 和 t，分别称为**源**和**汇**。边 e 上的权 $c(e)$ 称为边 e 的**容量**，又设此有向图是严格有向图，则称这个有向加权图是一个**网络**。

映射 f：$E(G)\to R$，满足

(C1) $\forall e\in E(G)$,　$0\leqslant f(e)\leqslant c(e)$,

(C2) $\forall v\in V(G)-\{s,t\}$,

$$0=\sum_{e\in\alpha(v)}f(e)-\sum_{e\in\beta(v)}f(e),\qquad(1)$$

其中 $\alpha(v)$ 表示以 v 为头的边集，$\beta(v)$ 表示以 v 为尾的边集，则称 f 为**流函数**。称

$$F=\sum_{e\in\alpha(t)}f(e)-\sum_{e\in\beta(t)}f(e)\qquad(2)$$

为 f 的**流量**。

我们的目标是定义一个流函数 f，使 $F=\max$。

设 $S\subset V(G)$，$s\in S$，$t\in V(G)-S=\bar{S}$，则称 $(S,\bar{S})$ 为网络的一个**截**，称

$$C(S)=\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)$$

为截量.

引理 1 **对每个** $S\subset V(G)$,

$$F=\sum_{e\in(S,\bar{S})}f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)}f(e).$$

证 把 (2) 及关于 $v\in\bar{S}-\{t\}$的一切 (1) 型方程相加，左端为 F，考虑边 $e=xy$，因 $v\in\bar{S}-\{t\}$，所以不考虑 x,y 皆在 S 中的情形。

(a) $x,y\in\bar{S}$，关于 y 的 (1) 型方程出现正的 $f(e)$，关于 x 的 (1) 型方程中出现负的 $f(e)$，正负抵消。

(b) 若 $x\in S$，$y\in\bar{S}$，则右端只出现 $f(e)$ 的正项，这时是 $e=xy\in(S,\bar{S})$。

(c) 若 $x\in\bar{S}$，$y\in S$，则右端只现 $f(e)$的负项，这时是$e=xy\in(\bar{S},S)$。

由(a),(b),(c)知引理 1 成立。**证毕**。

引理 1 的直观意义是明显的，$\sum_{e\in(S,\bar{S})}f(e)$是从$S$ 流入 $\bar{S}$ 的总量，$\sum_{e\in(\bar{S},S)}f(e)$是从 $\bar{S}$ 倒流入 S 的总量,F 表示净流入 t 的量，所以应该是从 S 流入 $\bar{S}$ 的量减去从 $\bar{S}$ 倒流入 S 的量。

引理 2 **对每个流函数及每个** $S\subset V(G)$,

$$F\leqslant C(S). \qquad (3)$$

证 由引理 1，

$$F=\sum_{e\in(S,\bar{S})}f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)}f(e).$$

(由$C1$),

$$0\leqslant f(e)\leqslant c(e),$$

故得

$$F\leqslant\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)=C(S).$$

证毕。

推论1 **若$F=C(S)$，则f是最大流，$(S,\bar{S})$是最小截（指$C(S)$最小）。**

为简洁地表述Ford-Fulkerson算法（下称2F算法），我们约定：

(1) 若$e=uv$，u已有标志，而v尚未标志，且$c(e)>f(e)$，则称通过边e可以**向前标志**顶v，规定

$$\Delta(e)=c(e)-f(e),$$

且得到标志边e。

(2) 若$e=vu$，u已有标志，而v尚未标志，且$f(e)>0$，则称通过边e可以**向后标志**顶v，规定

$$\Delta(e)=f(e),$$

且得到标志边e。

2F **算法**（Ford, Fulkerson, 1962）：

(1) 对每边e，取$f(e)=0$。

(2) 标志顶点s，其它顶未标志。

(3) 选可向前标志或可向后标志的顶v，若无此种顶可选时，止，现流函数即为最大流；若有此种顶可选，则得新的标志顶v及标志边e；若$v=t$，转(4)，否则转(3)。

(4) 设已得标志之轨为(此轨是无向的) $se_1v_1e_2v_2\cdots e_lt$，从t始沿此轨逆行，令

$$\Delta=\min_{1\leq i\leq l}\Delta(e_i),$$

若e_i是前进边，即在有向图中$e_i=v_{i-1}v_i$，$(s=v_0, t=v_l)$则

$$f(e_i)\leftarrow f(e_i)+\Delta;$$

若e_i是后退边，即$e_i=v_iv_{i-1}$，则

$$f(e_i)\leftarrow f(e_i)-\Delta.$$

(5) 转(2)。

在2F过程中，f始终满足(C1)与(C2)。

若$c(e)$是整数，初始流为0，则每次经2F的调整，流量至

少增加1，而流量的上界为 $\sum_{e\in E(G)} c(e)$，故2F算法经有限步之后必停止。

定理 1　2F 算法止时得到的函数 f 是最大流，且最大流量等于最小截的容量.

证　设2F止时，S 是最后一轮从 s 开始而不能达到 t 的标志过程中可得到标志的顶之集合。于是，

$$f(e)=\begin{cases}c(e), & e\in(S,\bar{S});\\ 0\ , & e\in(\bar{S},S),\end{cases}$$

不然可得新的不属于 S 的标志顶，这已不可能。由引理1，

$$F=\sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e)=\sum_{e\in(S,\bar{S})} c(e)=C(S).$$

由推论1，f 为最大流，$(S,\bar{S})$ 为最小截，且最大流量等于最小截之容量。**证毕.**

定理1说明最大流是存在的，它可由2F算法求得；定理1一般称为网络中的**"双最定理"**。它是图论中的核心定理之一，不久我们就会发现，双最定理在理论与实际问题当中，有许多精彩的应用。

11.2 Dinic 算法

2F算法有缺点，例如图11.1中所示的网络，用2F算法求得最大流时，若通过 $sabt$ 与 $sbat$ 交替地充当增载轨（2F算法无法排除这种坏可能），由 $f(e)=0$ 开始增载，需要进行 $2M$ 次增载才能获得最大流，于是2F的计算其时间复杂度不仅与网络之规模，即边数与顶数有关，而且还与（原则上是任意的）边之权有关系（图11.1）。

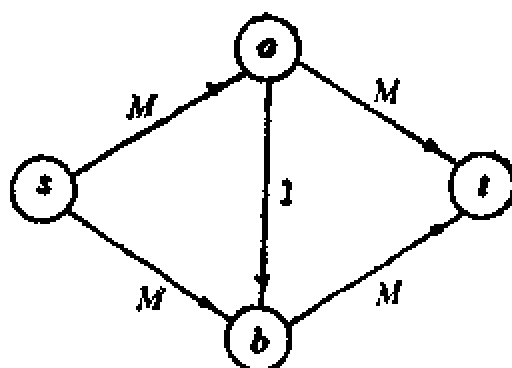


图 11.1

本节我们介绍另一个求最大流的算法，它是1970年由Dinic提出的一个有效算法。

下面我们把 $e=uv$，且 $0<f(e)<c(e)$ 或 $e=vu$，$f(e)>0$ 的边叫做**从 u 到 v 的有用边**。

首先用下面的分层算法获得**层状网络**。

分层算法：

(1) $V_0\leftarrow\{s\}$，$i\leftarrow 0$。

(2) $T\leftarrow\{v|v\in V_j,\ j\leqslant i$，且存在一个从 V_i 某顶到 v 的有用边$\}$。

(3) 若 $T=\varnothing$，止，网络上的流即为最大流。

(4) 若 $t\in T$，则 $l\leftarrow i+1$，$V_l\leftarrow\{t\}$，止。

(5) 令 $V_{i+1}\leftarrow T$，增大 i，转 (2)。

上述分层算法的时间复杂度为 $O(|E|)$。

$V_i(0\leqslant i\leqslant l)$ 叫做第 i 层，仅相邻两层之间有边，是从层次小的层中的顶到层次大的层的顶的有用边。得到的这个网络叫做关于流函数 f 的层状网络。

定理 2　若分层算法止于 (3)，则 f 为最大流。

证　令 $S=\bigcup\limits_{k=0}^{i}V_k$，则 $(S,\bar S)$ 中的边 $e=uv$ 满足 $f(e)=c(e)$，不然 e 是从 u 到 v 的有用边，这与 $T=\varnothing$ 矛盾。同理在 $(\bar S,S)$ 中的边 $e=vu$ 满足 $f(e)=0$。由引理 1，

$$F=\sum_{e\in(S,\bar S)}f(e)-\sum_{e\in(\bar S,S)}f(e)=\sum_{e\in(S,\bar S)}c(e)=C(S),$$

由推论 1，f 是最大流。**证毕。**

下面讨论如何利用层状网络改进原来网络中的流量，设原网络中的流函数是 f，E_l 是层状网络中从 V_{l-1} 到 V_l 的边集合 $\forall e=uv\in E_l$，规定

$$\tilde c(e)=\begin{cases}c(e)-f(e), & u\in V_{l-1},\ v\in V_l.\\ f(e), & v\in V_{l-1},\ u\in V_l.\end{cases}$$

$\bar{c}(e)$ 表示 e 上可改进的流量的上界。

我们把层状网络的边取权 $\bar{c}(e)$，采用零初始流 $\bar{f}(e)=0$，并把层状网络上的边重新定向为都从 V_{i-1} 指向 V_i（有的边在原网络中的方向可能与此相反），E_i 表示从 V_{i-1} 指向 V_i 的边集。

所谓**层状网络上的极大流** $\bar{f}$ 是指对每一条轨 $sv_1v_2\cdots v_{l-1}t$ 上至少有一边 e_i，使得 $\bar{f}(e_i)=\bar{c}(e_i)$，其中 $v_i\in V_i$，$e_i\in E_i$。

值得注意的是，层状网络上的极大流未必是它的最大流，例如图 11.2 中，其最大流量为 2，而图中标出的极大流流量为 1。

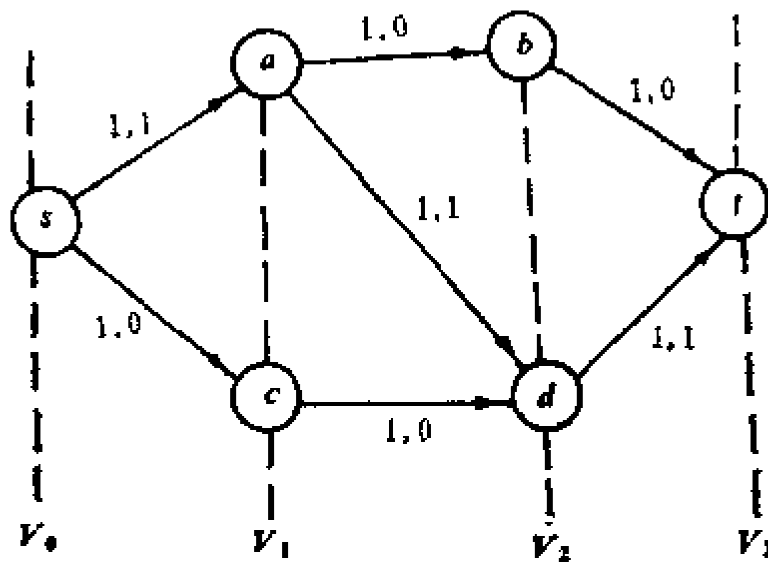


图 11.2

如果我们能求得层状网络上的一个极大流 $\bar{f}$，则可以如下地把原网络上的流 f 改进成流量更大的流 f'：

$$f'(e)=\begin{cases} f(e)+\bar{f}(e), & e=uv\in E(G),\ u\in V_{i-1},\ v\in V_i; \\ f(e)-\bar{f}(e), & e=vu\in E(G),\ u\in V_{i-1},\ v\in V_i; \\ f(e), & \text{其它。} \end{cases}$$

容易证明 $f'(e)$ 在原网络中满足(C1)，(C2)，且 f' 的流量 F' 大于 f 的流量 F。

我们把由原来网络的流 f 找到分层网络，再求得层状网络上的极大流 $\bar{f}$，并把原网络的流改进成 f' 的一个过程叫做一个阶

段。层状网络最后一层的脚标 l 叫做**层状网络的长度**，用 l_k 表示第 k 阶段层状网络的长度。

求层状网络 $\bar{N}$ 上极大流的算法：

（1）对 $\bar{N}$ 上每条边 e，标志 e 未堵塞，$\bar{f}(e)\leftarrow 0$。

（2）$v\leftarrow s$，$S=\varnothing$。

（3）若无未堵塞的边 $e=vu$，u 在下一层，则（v 是堵死端）执行：

(3.1) 若 $s=v$，止，$\bar{f}$ 即为极大流。

(3.2) 从 S 中移出其顶部的边 $e=uv$。

(3.3) 标志 e 堵塞，$v\leftarrow u$。

(3.4) 转（3）

（4）选一未堵塞边 $e=vu$（u 在下一层），把 e 放入 S 中，$v\leftarrow u$，若 $v\neq t$，转（3）。

（5）S 中的边构成一个可增载轨

$$se_1v_1e_2v_2e_3\cdots v_{l-1}e_lt.$$

(5.1) $\Delta\leftarrow\min\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\{\bar{c}(e_i)-\bar{f}(e_i)\}$。

(5.2) 对每个 $1\leqslant i\leqslant l$，$\bar{f}(e_i)\leftarrow\bar{f}(e_i)+\Delta$。当 $\bar{f}(e_i)=\bar{c}(e_i)$，标 e_i 堵塞。

(5.3) 转（2）。

上述求极大流的时间复杂度是 $O(|E|\cdot|V|)$。

下面我们将证明 l_k 是严格递增函数，于是分层只能进行不

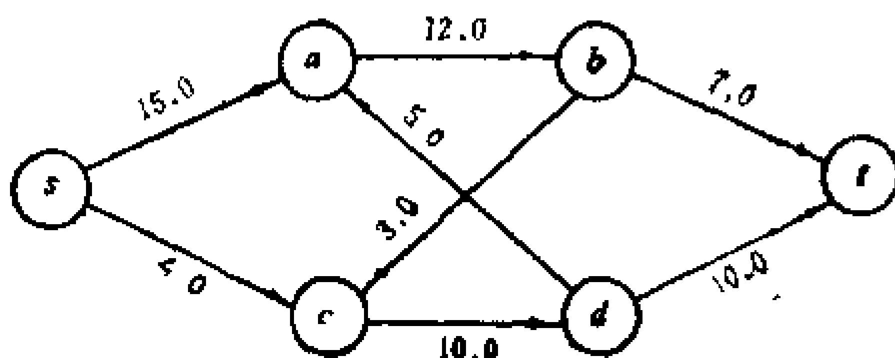


图 11.3

超过 $|V|-1$ 次，即有限阶段后，对所得之流函数已不能再分层，由分层算法中的（3），即得到了最大流，而整个 Dinic 算法的时间复杂度是 $O(|V|^2\cdot|E|)$。

例 1 求图 11.3 中网络上的最大流。

解 图中边上的第一个数是边容量，第二个数是流函数值。第一阶段分层网络及其上的极大流如图 11.4 所示。改进后

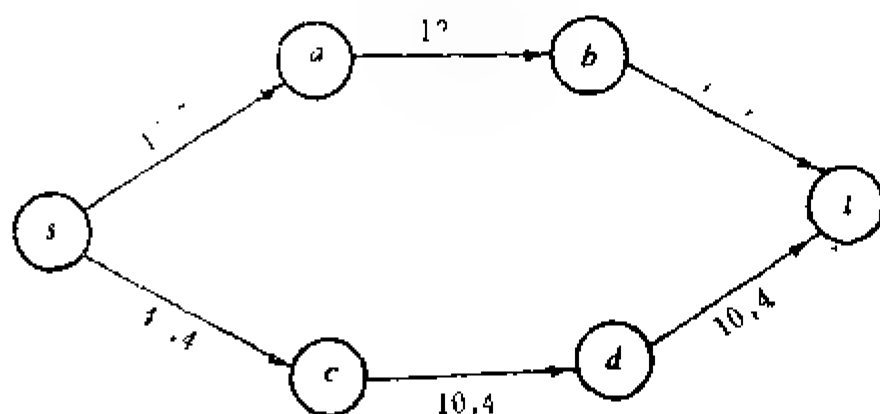


图 11.4

的流为图 11.5 所示。

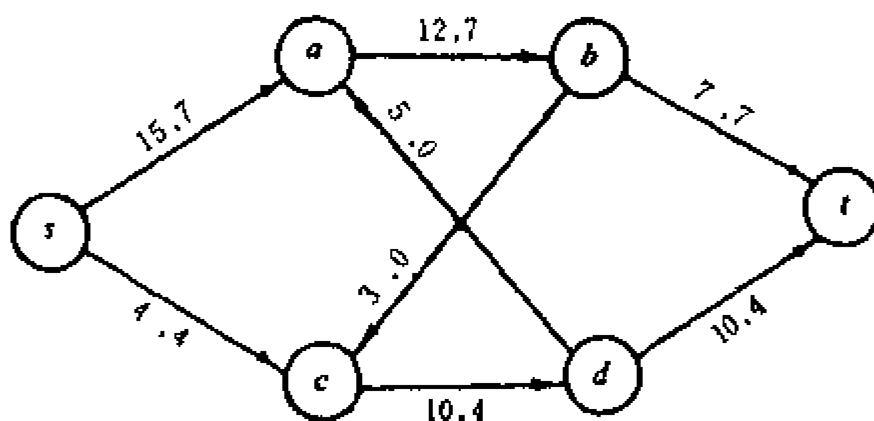


图 11.5

第二阶段用图 11.5 中的流函数来分层得层状网络及其极大流（图11.6）。



图 11.6

原网络上第二阶段得以改进的流如图 11.7 所示.

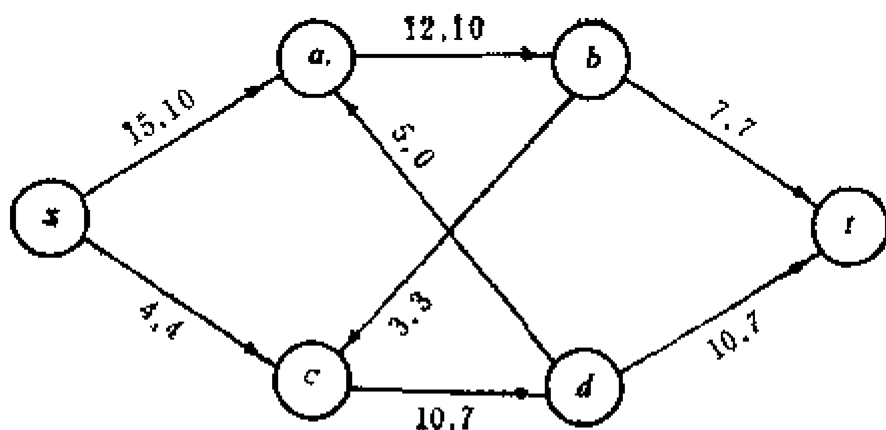


图 11.7

第二阶段用图 11.7 中的流函数分层时未到达 t 即中止于 b（图 11.8），于是图 11.7 中的流函数即为最大流，其流量为14.

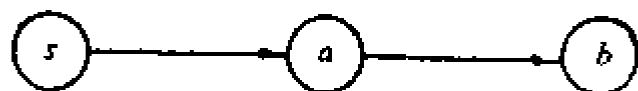


图 11.8

定理 3 Dinic **算法必能求得最大流.**

证 只欠证若第 $k+1$ 阶段不是最后阶段，则 $l_{k+1}>l_k$. 设在第 $k+1$ 阶段的层状网络中，有从 s 到 t 的长 l_{k+1} 的轨

$$P=se_1v_1e_2\cdots v_{l_{k+1}-1}e_{l_{k+1}}t.$$

（1）设 P 上的一切顶在第 k 阶段的层状网络上出现过. 用 V_j 表示第 k 阶段层状网络上第 j 层中的顶集，若 $v_a\in V_b$，则 $a\geqslant b$.

用关于 a 的归纳法证明之.

$a=0$ 时，$v_a=v_0=s$，$V_0=\{s\}$，命题"$v_a\in V_b$，则 $a\geqslant b$"成立；假设 $v_a\in V_b$，$v_{a+1}\in V_c$，若 $c\leqslant b+1$，由归纳法假设 $v_a\in V_b$ 时，$a\geqslant b$，得 $a+1\geqslant b+1$. 今 $c\leqslant b+1$，故 $c\leqslant a+1$. 若 $c>b+1$，而今 $v_{a+1}\in V_c$，又 V_b 与 V_c 不是邻层，这是不可能的. 故只有 $c\leqslant a+1$.

今 $t=v_{l_{k+1}}$，$t\in V_{l_k}$，故有 $l_{k+1}\geqslant l_k$. 下证等号不能成立. 若

$l_{k+1}=l_k$，我们已假设 P 上的顶在 k 阶段的层状网络上出现过，轨上之边在 $k+1$ 阶段的层状网络上用过，则在 k 阶段的层状网络上用过，且 P 整个在 k 阶段层状网络上，此与 k 阶段上得出过极大流矛盾。

（2）设 P 上有的顶未在第 k 阶段层状网络上出现，令 $e_{a+1}=v_a v_{a+1}$ 是对某个 b，$v_a \in V_b$，但 v_{a+1} 不在第 k 阶段层状网络上出现的第一条边，则 e_{a+1} 在第 k 阶段层状网络中未用过，e_{a+1} 在第 $k+1$ 阶段开始时有用，故在第 k 阶段开始时也有用。由分层算法（4），$V_{b+1}=\{t\}$，$b+1=l_k$，于是 $a\geqslant b$，$a+1\geqslant b+1=k_l$，又 $v_{a+1}\neq t$，故 $l_{k+1}>a+1$，所以 $l_{k+1}>l_k$。**证毕**。

11.3 容量有上下界的网络

设边容量之下界为 $b(e)\geqslant 0$，上界为 $c(e)$，这时流函数应满足

$$(C1')\quad b(e)\leqslant f(e)\leqslant c(e).$$

$$(C2')\quad \sum_{e\in\alpha(v)} f(e)-\sum_{e\in\beta(v)} f(e)=0,\quad v\neq s,t.$$

我们的目标仍然是求最大流。但是，有上下界的网络，有时不存在流，例如图 11.9 中的网络就没有流函数。边上第一个数

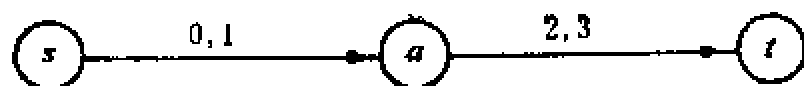


图 11.9

是 $b(e)$，第二个数是 $c(e)$。

下面讨论有上下界的网络中有可行流的充要条件。我们把有上下界的网络记成 $N(G(V,E),\ b(e),\ c(e))$，N 的**附加网络** $\bar{N}$ 为下述网络：

（1）$\bar{V}=\{\bar{s},\bar{t}\}\cup V$，$\bar{s},\bar{t}\notin V$；$\bar{s},\bar{t}$ 分别叫做附加源与附加汇。

（2）对每个$v\in V(G)$，加一条新边$e=v\bar{t}$，令$\bar{c}(e)=\sum_{e\in\beta(v)}b(e)$，$\bar{c}(e)$是$e$的容量上界，下界取0。

（3）对每个$v\in V$，加一条新边$e=\bar{s}v$，令$\bar{c}(e)=\sum_{e\in\alpha(v)}b(e)$，$\bar{c}(e)$是$e$的容量之上界，下界取0。

（4）E中的边e在$\bar{N}$中皆保留，但界要变：下界取0，上界$\bar{c}(e)=c(e)-b(e)$。

（5）再加新边$e=st$，$e'=ts$，且令e与e'的下界为0，上界$\bar{c}(e)=\bar{c}(e')=\infty$。

定理4　网络$N(G(V,E),b(e),c(e))$有可行流的充要条件是附加网络$\bar{N}$上的最大流使流出$\bar{S}$的一切边皆满载（可行流即满足$(C1')(C2')$的流）。

证　设$\bar{N}$中流函数$\bar{f}$使得从$\bar{S}$发出的边皆满载，对于N，令

$$f(e)=\bar{f}(e)+b(e),\quad e\in E(G).$$

下证$f(e)$是N中的可行流。

(i) $b(e)\leqslant f(e)\leqslant c(e)$。

事实上，$0\leqslant\bar{f}(e)\leqslant\bar{c}(e)=c(e)-b(e)$，$e\in E(G)$，所以$f(e)$满足$(C1')$：

$$b(e)\leqslant f(e)\leqslant c(e).$$

(ii) $f(e)$满足$(C2')$。

令$v\in V(G)-\{s,t\}$，而$\sigma=\bar{S}v$，$\tau=v\bar{t}$是$\bar{N}$中的边，由$\bar{N}$中的$\bar{f}$满足$(C2')$，得

$$\sum_{e\in\alpha(v)}\bar{f}(e)+\bar{f}(\sigma)=\sum_{e\in\beta(v)}\bar{f}(e)+\bar{f}(\tau),\qquad(1)$$

又有定理条件

$$\bar{f}(\sigma)=\bar{c}(\sigma)=\sum_{e\in\alpha(v)}b(e),\qquad(2)$$

$$\bar{f}(\tau)=c(\tau)=\sum_{e\in\beta(v)}b(e). \tag{3}$$

由（1），（2），（3）得

$$\sum_{e\in\alpha(v)}\bar{f}(e)+\sum_{e\in\alpha(v)}b(e)=\sum_{e\in\beta(v)}f(e)+\sum_{e\in\beta(v)}b(e),$$

从而得

$$\sum_{e\in\alpha(v)}f(e)-\sum_{e\in\beta(v)}f(e)=0,$$

即$f(e)$满足$(C2')$，故$f(e)$是可行流．反之，若$f(e)$是N的可行流，令

$$\bar{f}(e)=\begin{cases}f(e)-b(e), & e\in E(G);\\ \bar{c}(e), & e\in\alpha(\bar{t})\text{ 或 }e\in\beta(\bar{S}).\end{cases}$$

显然$\bar{f}(e)$是$\bar{N}$上使得从$\bar{S}$发出的边皆满载的流。**证毕.**

例 2 求图 11.10 中网络上的最大流，边上写的数第一个是$b(e)$，第二个是$c(e)$。

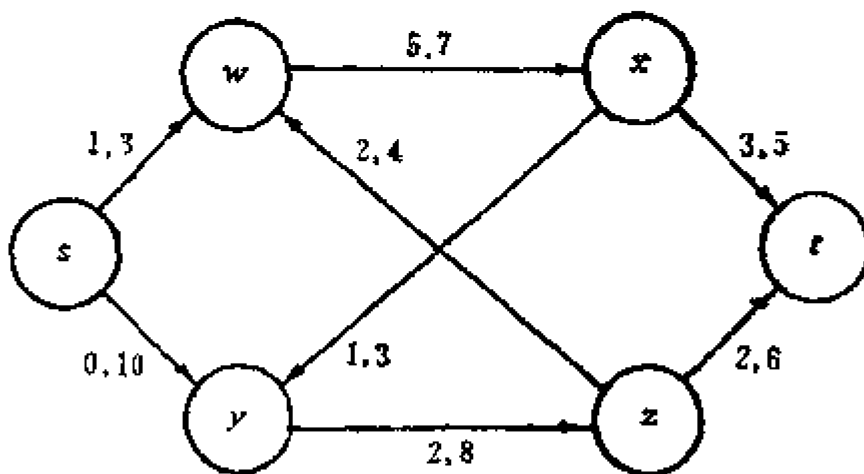


图 11.10

解 （1）作附加网络，如图11.11，用 2F 或 Dinic 算法求得附加网上的最大流$\bar{f}$。在图11.11上，用边上第二个数值表示，由于出$\bar{S}$的边皆满载，由定理4，图11.10中有可行流。

（2）把 $\bar{f}$ 化为原网络图 11.10 上的可行流

$$f=\bar{f}+b(e),$$

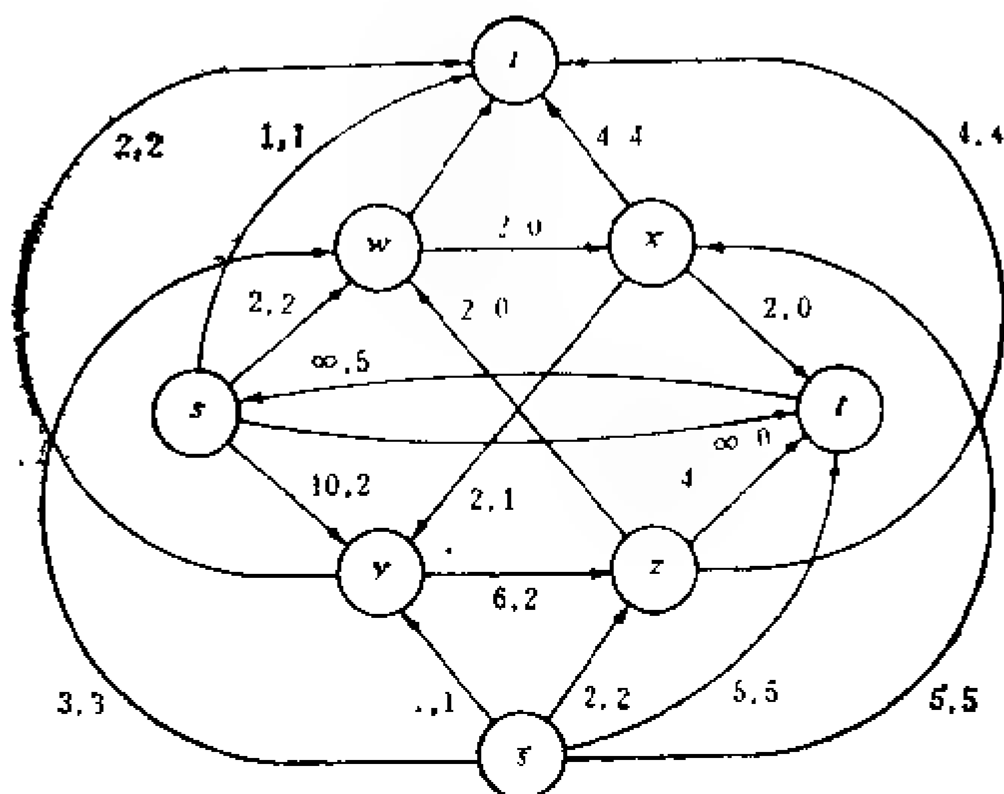


图 11.11

如图11.12，边上的三个数依次为 b,c,f。

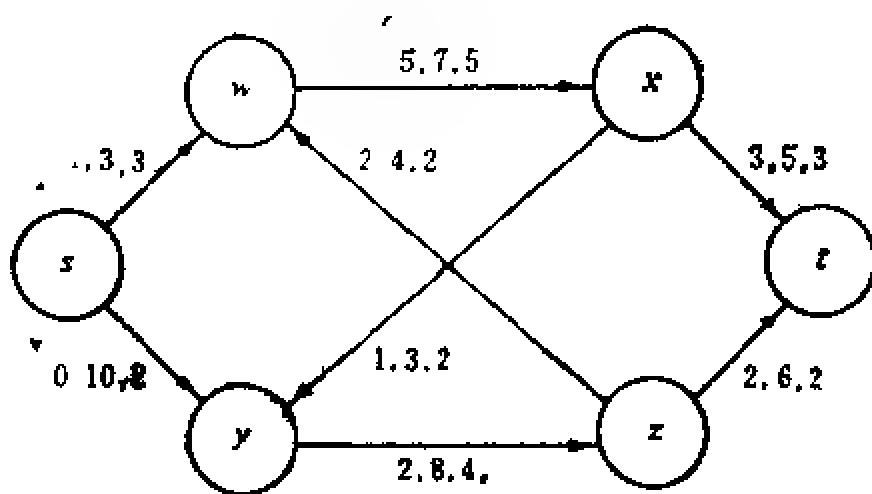


图 11.12

（3）把图 11.12 中的可行流放大(用 2F 算法亦可用 Dinic 算法)，得最大流如图 11.13。

最大流的流量$F=10$。

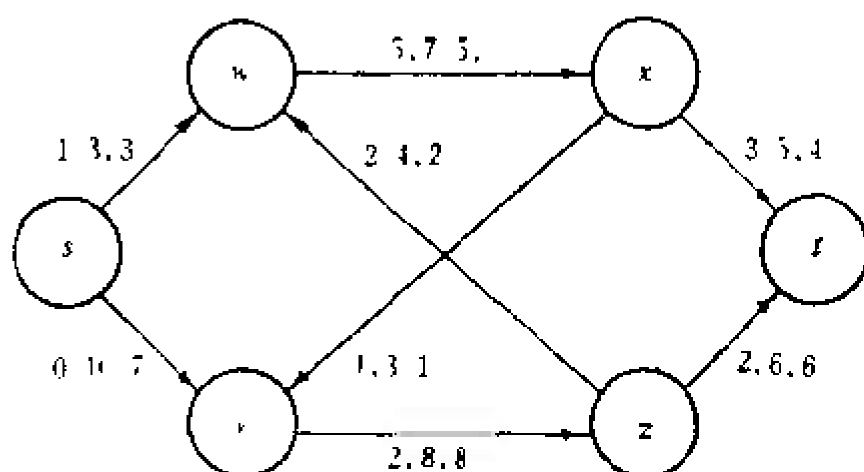


图 11.13

11.4 有供需约束的流

设$N(G(V,E),c(e))$是一个网络，$c(e)$是边e的容量，又$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是源集合，$m\geqslant 1$；$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是汇集合，$n\geqslant 1$。

$$\sigma:\ X\to\{0,1,2,\cdots\},$$

$\sigma(x_i)$称为源x_i的供应量；

$$\rho:\ Y\to\{0,1,2,\cdots\},$$

$\rho(y_i)$称为汇y_i的需求量.要求流函数$f(e)$不仅满足(C1)(C2)，而且满足供求约束：

$$\text{(C3)}\qquad \sum_{e\in\beta(x_i)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(x_i)} f(e)\leqslant\sigma(x_i),\ i=1,2,\cdots,m;$$

$$\text{(C4)}\qquad \sum_{e\in\alpha(y_i)} f(e)-\sum_{e\in\beta(y_i)} f(e)\geqslant\rho(y_i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

(C3)表示对于产地，求不能过于供；(C4)表示对于销地，供不能低于求，这样可以免于发生供求矛盾。

把满足(C1),(C2),(C3),(C4)的流$f(e)$称为可行流。若

$S\subseteq X$，则记$\sigma(S)=\sum_{v\in s}\sigma(v)$；若 $S\subset Y$，则记 $\rho(s)=\sum_{v\in s}\rho(v)$。

下面给出可行流的充要条件。

定理 4 f **是有供需约束的可行流，当且仅当对一切** $S\subseteq V(G)$，

$$C(S)\geqslant\rho(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap S),$$

其中 $\bar{S}$ **是** S **的补集，**X**为源集，**Y **为汇集，**$C(S)$**为** $(S,\bar{S})$ **中边约容量和（即截量）．**

证 构作新网络N'：

(i) 增加两个新顶x_0,y_0。

(ii) 加边$x_0x_i,i=1,2,\cdots,m$，令$c(x_0x_i)=\sigma(x_i)$。

(iii) 加边y_jy_0，$j=1,2,\cdots,n$。令$c(y_jy_0)=\rho(y_j)$。

(iv) 令x_0为N'的源，y_0为N'的汇。

容易证明，N有可行流的充要条件是N'中有一个使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载的流。

今有N'中的流使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载，则其流量$\rho(Y)=C(Y)$，此流是N'中的最大流．这说明N有可行流，当且仅当对N'中的每个截$(S\cup\{x_0\},\ \bar{S}\cup\{y_0\})$成立

$$C(S\cup\{x_0\})\geqslant\rho(Y),$$

等价于

$$C(S,\bar{S})+\rho(Y\cap S)+\sigma(X\cap\bar{S})\geqslant\rho(Y),\qquad(3)$$

等价于

$$C(S,\bar{S})\geqslant\rho(Y)-\rho(Y\cap S)-\sigma(X\cap\bar{S}),$$

等价于

$$C(S,\bar{S})\geqslant\rho(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S}).$$

证毕。

从算法的角度而言，只要用2F或Dinic算法，求N'的最大流f，若f是使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载的流，则f亦是N中的可行流。

本章主要介绍了Ford-Fulkerson算法和Dinic算法来求最大流，有上下界的网络和有供需约束的网络可以转化成另一个网络，继而可用2F或Dinic来求解。这些算法，似乎有点烦琐但很重要，应熟练掌握。至于最大流最小截定理，即双最定理，是图论中的骨干定理之一，它对于理论和实际的问题，都有用。这一点，从下一章我们就会看得更清楚。

习　　题

1．若网络中不存在从s到t的轨，s是源，t是汇，则此网络上的最大流量与最小截量皆为0．

2．求图11.14中网络的最大流，边上的数字是边容量。

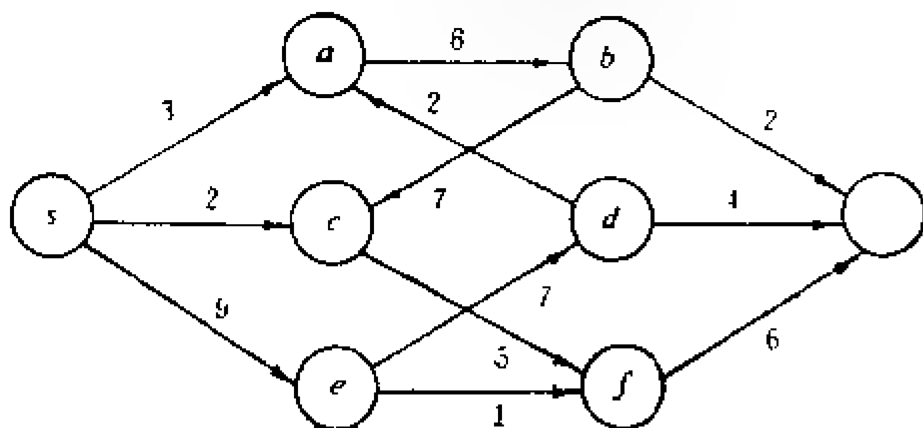


图 11.14

3．在图11.15的网络中，x_1, x_2, x_3是同一种商品的货源，

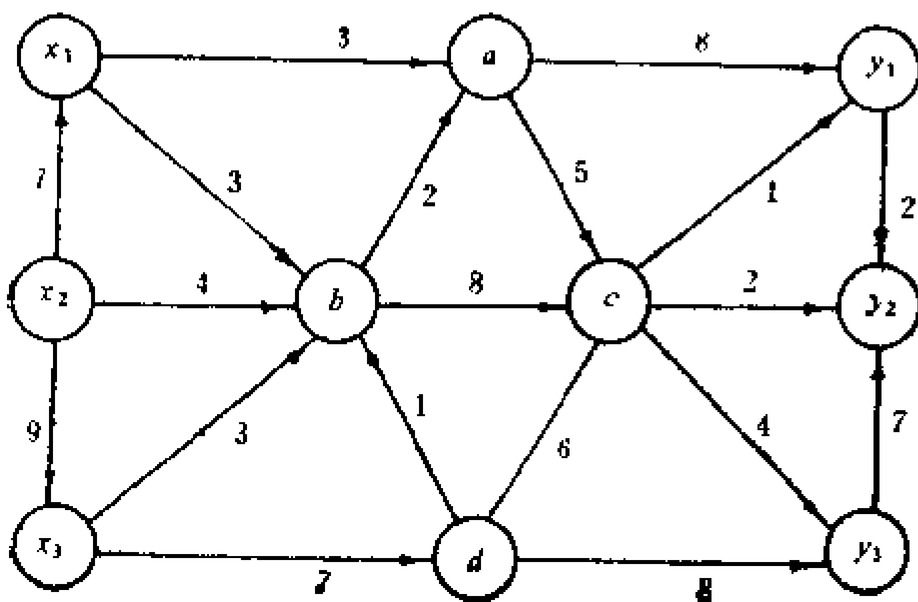


图 11.15

供应量 x_1 为 5，x_2 为 10，x_3 为 5；y_1, y_2, y_3 是市场，需求量 y_1 是 5，y_2 是10，y_3 为 5，是否所有的需求皆可同时被满足？

4．在图 11.16 中，除边有容量外，s 与 t 外的每个顶都有一个可以通过它的流量的上界，即顶的容量，它写在顶标志之下．求此网络上的一个最大流．

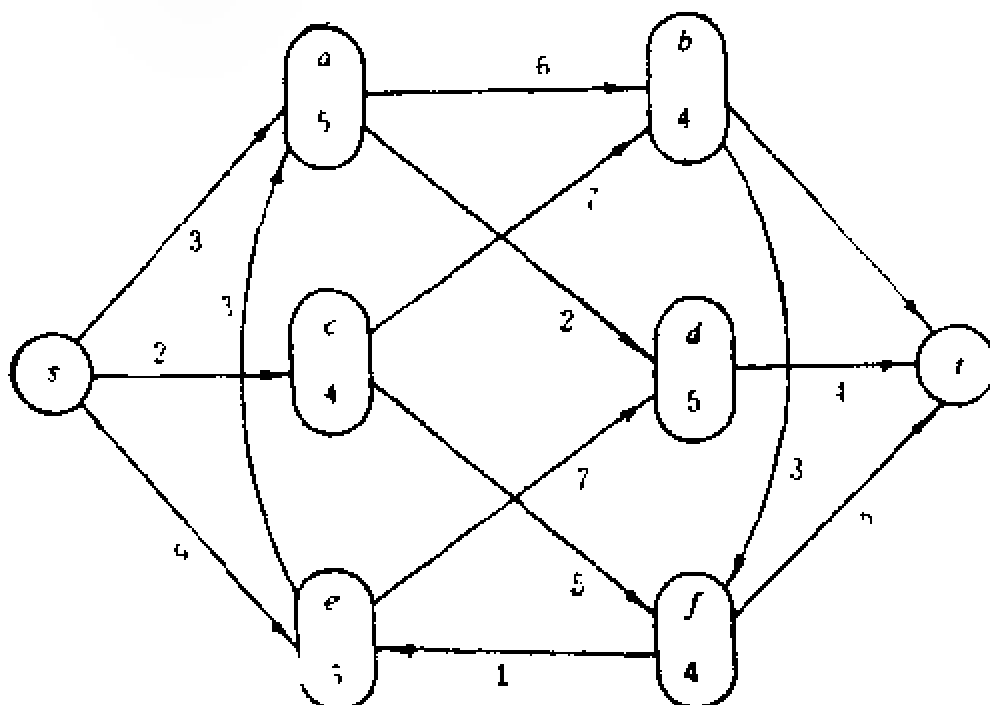


图 11.16

5．(a) 写出一个如同 2F 算法的标志过程，但标志由 t 开始，到达 s 时即得一可增载轨．

(b) 写出一个当此边容量增大时，最大流量也增加的边之定位方法．

(c) (b)中所述之边总存在吗？

6．证明有供需约束的网络上有可行流的充要条件是 N' 中有一个使 $(Y, \{y_0\})$ 每边皆满载的流，其中 N' 见定理 4 之证明．

7．证明在有正下界 $b(e)$ 但无上界 $(c(e)=\infty)$ 的网络中，存在可行流的充要条件是对每一边 e，要么 e 在一个有向回路上，要么 e 在由 s 到 t 或由 t 到 s 的有向道路上．

8．在第 2 题中，若边上写的为下界，而无上界，求一个最

小流。

9. 下面两个网络（图11.17，图11.18）中，哪个无可行流？若存在可行流，求其最大流与最小流；若不存在可行流，找出一个不含源亦不含汇的顶子集，它要么要求“冒出”流，要么要求“漏掉”流。

10. 证明有上下界的网络中无可行流的充要条件是：存在一个顶子集，不含源与汇，且它要求“冒出”或“漏掉”流。

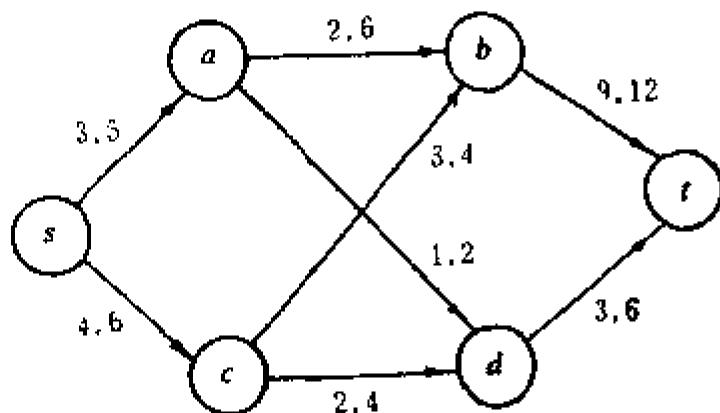


图 11.17

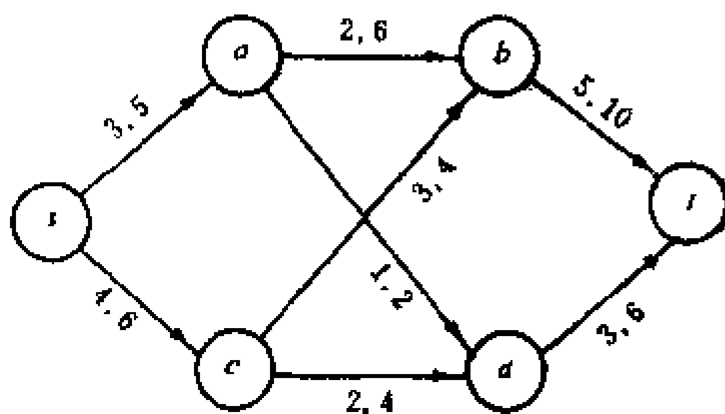


图 11.18

12 网络流方法的应用

12.1 顶连通度

若$S\subset V(G)$，$\{a,b\}\subset V-S$，若每条由a到b的轨至少一个内顶在S中，则称S为(a,b)**分离集**；a与b相邻时，无(a,b)分离集．设$\mathscr{S}$是(a,b)分离集集合，令

$$N(a,b)=\min|S|,S\in\mathscr{S}$$

$N(a,b)$叫做a顶与b顶的**分离数**．

我们称从a到b的两两无公共内顶的轨为**独立轨**．

定理 1　a,b是图$G(V,E)$不相邻的顶，则

$$N(a,b)=p(a,b),$$

其中$p(a,b)$是a到b独立轨的最大条数．

证　我们构作一个有向图$G(\bar{V},\bar{E})$：把$V(G)$中的每一顶变成$\bar{V}$中的两个顶v'与v''，且$e_v=v'v''\in\bar{E}$．对于E中每条边$e=uv$，在$\bar{E}$中有两条边$e'=u''v'$，$e''=v''u'$与之对应．此外，$G(\bar{V},\bar{E})$中无其它的边与顶．在$G(\bar{V},\bar{E})$上形成一个网络，a''为源，b'为汇，对e_v型边，容量为1，其它边容量∞．

下证$p(a,b)$是a''到b'的最大流量F．

设无向图G中有$p(a,b)$条从a到b的独立轨，每条这种轨相应地在$G(\bar{V},\bar{E})$中形成一条有向轨．在G中的轨为

$$av_1v_2\cdots v_{l-1}b,$$

在$G(\bar{V},\bar{E})$中相应的有向轨为

$$a''v_1'v_1''v_2'v_2''\cdots v_{l-1}'v_{l-1}''b',$$

这些有向轨在$G(\bar{V},\bar{E})$中两两无公共内顶，每条都可以用来从

a'' 到 b' 流过 1 个单位的流量，故

$$F \geqslant p(a,b).$$

设 f 是一个最大流，其流量为 F，由 $G(\bar{V},E)$ 的构造及边容量之分配知，这 F 个单位的流量被分解到 F 条独立有向轨上去了，每条轨流过 1 个流量，故

$$F \leqslant p(a,b).$$

至此得知
$$F = p(a,b).$$

由双最定理，F 等于某截 $(S,\bar{S})$ 之容量，$a''\in S$，$b'\in\bar{S}$，所以 $C(S)=\sum\limits_{e\in(S,\bar{S})}c(e)=F<\infty$，即 $(S,\bar{S})$ 中的边皆 e_v 型。而在 $G(\bar{V},\bar{E})$ 中，从 a'' 到 b' 的有向轨上至少含 $(S,\bar{S})$ 中的一条边，故 G 中每条由 a 到 b 的轨至少含一个顶 v，使 e_v 在 $(S,\bar{S})$ 中。于是

$$R=\{v\,|\,v\in V(G),\ e_v\in(S,\bar{S})\}$$

是无向图 G 中 (a,b) 分离集，且

$$|R|=C(S)=F.$$

从而有

$$N(a,b)\leqslant F.$$

另一方面，显然有 $N(a,b)\geqslant p(a,b)$，故得证

$$N(a,b)=p(a,b).$$

证毕.

无向图 G 的顶连通度 $\kappa(G)$，用我们本章的符号则可写成：

$$\kappa(G)=\begin{cases}|V|-1, & G\text{ 为完全图；}\\ \min\limits_{a,b\text{ 不邻}} N(a,b), & G\text{ 不为完全图.}\end{cases}$$

定理 2
$$\kappa(G)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b).$$

证 G 是完全图，定理显然成立。下面考虑 G 不是完全图的情形，先证明

$$\min_{\substack{a,b\in V(G)\\ a,b\text{不邻}}} p(a,b)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b)。$$

设 $ab\in E(G)$，$e=ab$，且 $p(a,b)$ 是一切间顶对间独立轨最大条数的最小值，令 $G'=G-e$，在 G' 中 a,b 间独立轨最大条数为 $p(a,b)-1=p'(a,b)$。由定理 1，G' 中存在 (a,b) 分离集 R，使得

$$p'(a,b)=|R|=p(a,b)-1。$$

若 $|R|=|V|-2$，则 $p(a,b)=|V|-1$；但当 $u,v\in V(G)$，u 与 v 不相邻时，$p(u,v)+2\leqslant|V|$，$p(u,v)\leqslant|V|-2$，这是不可能的，故得 $|R|<|V|-2$。于是存在 $v\in V-(R\cup\{a,b\})$，不妨设 R 是 (a,v) 分离集（不然用 (b,v) 代替 (a,v)），于是 G 中 $av\bar{\in} E(G)$，$R\cup\{b\}$ 也是 (a,v) 分离集，因而

$$p(a,v)\leqslant|R|+1=p(a,b),$$

故得

$$\min_{\substack{a,b\in V(G)\\ a,b\text{不邻}}} p(a,b)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b)。$$

下面证明 G 不是完全图时，

$$\kappa(G)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b)。$$

事实上，这时 $\kappa(G)=\min\limits_{\substack{a,b\in V(G)\\ a,b\text{不邻}}} N(a,b)$。由定理 1，得

$$\kappa(G)=\min_{\substack{a,b\in V(G)\\ a,b\text{不邻}}} p(a,b)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b)。$$

证毕。

定理 1 和定理 2 告诉我们如何通过求某网络上的最大流而得到 $\kappa(G)$ 的值。

定理 1 和定理 2 是图论中十分重要的两个定理，是著名的 Menger 型定理中的两个，它们有许多精彩的推论。

G 是无向图，$x\in V(G)$，$U\subset V(G)$，$x\bar{\in} U$，一端为 x，另一

端在 U 中的 $|U|$ 条除 x 外再无公共顶的轨形成的子图叫做 G 的一个 $x-U$ **扇子**.

推论 1 **G 是 k 连通图的充要条件是 $|V(G)|\geqslant k+1$，任取 $U\subset V(G)$，$|U|=k$，$x\in V(G)-U$，则存在 G 的 $x-U$ 扇子.**

证 假设 G 是 k 连通图，显然 $|V(G)|\geqslant k+1$，加一新顶 y，把 y 与 U 的每顶之间连一边，得图 H，对 H 应用定理 2，知 x 与 y 之间有 k 条独立轨，故 G 中有 $x-U$ 扇子. 反之，设 $|V(G)|\geqslant k+1$，且有推论中所述的扇子，但 G 非 k 连通图，则 $\kappa(G)\leqslant k-1$，于是存在 x，$y_1\in V(G)$，$S\subset V(G)$，$|S|=k-1$，在 $G-S$ 中，x，y_1 不连通，在 G 中无 $x-(S\cup\{y_1\})$ 扇子，矛盾. **证毕.**

推论 2 (Dirac)**G 是 k 连通图，$k\geqslant 2$，则任意 k 个顶共圈.**

证 对 k 进行归纳法证明. $k=2$ 时推论 2 显然成立. 假设 $k=l\geqslant 2$ 时推论已成立，要证 $k=l+1$ 时，推论 2 仍成立.

事实上，因 G 是 $l+1$ 连通的，所以也是 l 连通的，由归纳法假设，任取的 $l+1$ 个顶中的 l 个是共圈的，记它们所在的圈是 C_l. 另一方面，由推论 1，任取 $x\in V(G)$，再任取 $U\subset V(G)$，$x\notin U$，$|U|=l+1$，存在 $x-U$ 扇子. 记上述 $l+1$ 个顶是 $v_1,v_2,\cdots,v_{l+1}$，$\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}\subseteq V(C_l)$，而 $|V(G)|\geqslant l+2$，我们取 $U=\{v_1,v_2,\cdots,v_l,w\}$，$x=v_{l+1}$. 若 C_l 上只有 l 个顶，由扇子 $v_{l+1}-U$ 可知 $v_1,v_2,\cdots,v_{l+1}$ 共圈：$v_1v_2\cdots v_l\cdots v_{l+1}\cdots v_1$.

若 C_l 上存在一顶 $u\notin\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}$，不妨设 $u\in\widehat{v_1v_2}$. 在扇子 $v_{l+1}-\{v_1,v_2,\cdots,v_l,u\}$ 上，v_{l+1} 与 $\{v_1,\cdots,v_l,u\}$ 之间的 $l+1$ 条独立轨为 $P(v_{l+1},v_i)(i=1,\cdots,l)$ 与 $P(v_{l+1},u)$，它们与 C_l 的第一个交点(顶)分别为 $w_1,w_2,\cdots,w_l,w_{l+1}$，且 $w_i\neq w_j$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant l+1$. 由鸽笼原理，必有两个顶 w_i,w_j 落在同一段弧 $\widehat{v_mv_{m+1}}$ 上，脚标 m 满足 $1\leqslant m\leqslant l$（按 mod l 计算）. 于是 $v_1,v_2,\cdots,v_{l+1}$ 共圈：

$$v_{i+1}\cdots w_i v_m v_{m-1}\cdots v_2 v_1 v_i v_{i-1}\cdots v_{m+1} w_j \cdots v_{i+1},$$

这里假设在$\widehat{v_m v_{m+1}}$上w_i距v_m较近，且可能$v_m = w_i$，或可能$w_j = v_{m+1}$。**证毕。**

12.2 有向图的连通度和无向图的边连通度

12.2.1 求有向图的连通度的算法

设G是无平行边的有向图，$S\subset V(G)$，$S\cap\{a,b\}=\varnothing$，a，$b\in V(G)$，从a到b的有向轨上至少有一个内顶属于S，则称S是G中一个(a,b)**分离集**。令$\mathscr{S}$表示**有向图G中(a,b)分离集集合**，称

$$N(a,b)=\min|S|,\quad S\in\mathscr{S}$$

为(a,b)**分离数**。而$p(a,b)$表示从a到b的**有向独立轨**之最大条数。

有向图G的连通度记为$\kappa(G)$，定义为

$$\kappa(G)=\begin{cases}|V|-1, & G\text{ 是双向完全图，}\\ \min\limits_{ab\bar{\in}E(G)} N(a,b), & G\text{ 不是双向完全图。}\end{cases}$$

所谓**双向完全图**是指$\forall a,b\in V(G)$，$\exists ab$，$ba\in E(G)$。G中有(a,b)分离集的充要条件是$ab\bar{\in}E(G)$。这里说的有向图的连通度有时也称为**强连通度**。$\kappa(G)>0$当且仅当G为强连通有向图。

我们把有向图G中的每条边$e=uv$变成一条有向轨，$u'u''v'v''$，得到一个新的有向图$\bar{G}$。在$\bar{G}$上以a''为源，以b'为汇，容量规定为$c(u'u'')=c(v'v'')=1$，$c(u''v')=\infty$，构成一个网络N。于是与无向图中相似地可得：

(1) $ab\bar{\in}E(G)$，则$p(a,b)=N(a,b)=N$**中最大流之流量**。

(2) G 不是双向完全图，则

$$\min_{ab\in E(G)} p(a,b)=\min_{a\ b\in V(G)} p(a,b).$$

(3)
$$\kappa(G)=\min_{a\ b\in V(G)} p(a,b).$$

可见，通过求最大流可以求得非双向完全图中的$N(a,b)$ $(ab\overline{\in}E(G))$，经取min运算，即可得有向图的连通度$\kappa(G)$。注意这里的字母a与b是有序的。

12.2.2 求无向图的边连通度的算法

设$T\subseteq E(G)$，G是无向图，a，$b\in V(G)$，从a到b的每条轨上至少有一边在T中，则称T是G的(a,b)**边分离集**。令$\mathcal{T}$表示(a,b)边分离集集合，规定

$$M(a,b)=\min|T|,\quad T\in\mathcal{T}$$

$M(a,b)$叫做G中a,b的**边分离数**。我们用$p'(a,b)$表示从a到b弱独立轨的最大条数，所谓**弱独立轨**是指无公共边的轨，即若$P_1,P_2,\cdots,P_m$是轨，$E(P_i)\cap E(P_j)=\varnothing$，$1\leqslant i,j\leqslant m$，$i\neq j$，则称$P_1,P_2,\cdots,P_m$是弱独立轨。

边连通度$\kappa'(G)$显然为

$$\kappa'(G)=\min\{M(a,b)\mid(a,b)\in V\times V\}.$$

我们把$G(V,E)$的每一边$e=uv$变成重边，再定向成互为反向，得$e'=uv$，$e''=vu$，赋权$c(e')=c(e'')=1$，以a为源，以b为汇，得到一个网络N。与无向图的顶连通度讨论相似地可以证明：

$$M(a,b)=p'(a,b)=N\text{ 中从 }a\text{ 到 }b\text{ 的最大流量}.$$

于是可以用网络流技术得$\kappa'(G)$。

12.3 有向图的边连通度和弱独立外向生成树

12.3.1 求有向图的边连通度的算法

设$T\subseteq E(G)$，G是有向图，且从a到b的每条有向轨上至少有一条边在T中，则称T是G中一个(a,b)**边分离集**，其中$a,b\in V(G)$，定义G的边连通度为

$$\kappa'(G)=\min\{M(a,b)\mid(a,b)\in V\times V\},$$

其中

$$M(a,b)=\min|T|,\ T\in\mathscr{T}$$

$\mathscr{T}$**是**G**中**(a,b)**边分离集集合**。

以a为源，以b为汇，每边容量为1，在G上建立一个网络N，则与前面相似地可以证明

$M(a,b)=p'(a,b)=N$**中从**a**到**b**的最大流的流量**。

于是求$\kappa'(G)$化为求网络之最大流。

定理 3 (Edmonds, 1973) a**是有向图**G**的一个顶，且**$\min\limits_{v\in V-\{a\}}M(a,v)=k$，**则**$G$**中存在以**$a$**为根的**$k$**棵弱独立外向生成树（所谓弱独立生成树，即无公共边的生成树）**。

证 对k进行归纳法证明。$k=1$时，$\min\limits_{v\in V-\{a\}}M(a,v)=1$，又$M(a,v)=p'(a,v)$，故从$a$至任意一个顶$v$至少有1条有向轨，显然有一棵外向生成树，它以$a$为根，可见$k=1$时定理成立。

令

$$\delta_G(S)=|(S,\bar{S})|,S\subset V(G).$$

且用$G-H$表示从G中删去其子图H之一切边所得的生成子图。显然有（因为$\delta_G(S)$是截容量，而$M(a,v)$是最大流量）：

$$\min_{v \in V-\{a\}} M(a,v) \geq k \Longleftrightarrow \text{对每个 } S \subset V(G), a \in S,$$
$$S \neq V(G),\ \delta_G(S) \geq k \qquad (1)$$

设$F(V',E')$是G的子图，且满足

(i) F是根在a的外向树，

(ii) 对每个$S \subset V$，$S \neq V$，$a \in S$，$\delta_{G-F}(S) \geq k-1$. 这样的F是存在的. 若F是G的外向生成树，由归纳法假设及式(1)知，$G-F$中有$k-1$棵弱独立的以a为根的外向生成树，于是G中有$k-1+1=k$棵弱独立的以a为根的外向生成树.

若F不是G的外向生成树. 我们下面令F"生长"为一棵外向生成树又不破坏(i)与(ii). 为此考虑满足下列三个条件的集合$S \subset V$：(1) $a \in S$，(2) $S \cup V' \neq V$，(3) $\delta_{G-F}(S)=k-1$. 若S集不存在，我们把$(V', \bar{V}')$的任一条边e加到F上，使$F+e$仍满足(i)与(ii).

(i) 自然满足. 下面反证(ii)亦能满足. 不然，存在某个集合$S, S \neq V$，$a \in S$，但$\delta_{G-(F+e)}(S)<k-1$，即$\delta_{G-F}(S)<k$，$\delta_{G-F}(S) \leqslant k-1$. 又已有$\delta_{G-F}(S) \geqslant k-1$，故$\delta_{G-F}(S)=k-1$，即$S$满足(3)，$S$满足(1)早已成立，若$S$还满足(2)，则$S$满足了(1)，(2)，(3)，与不存在满足(1)，(2)，(3)的S矛盾.

下验证S满足(2). 设$e=uv$是加到F上去的那条边，因$F_{G-(F+e)}(S)<k-1$，$\delta_{G-F}(S)=k-1$，故$v \bar{\in} S$，又$v \bar{\in} V'$，所以$S \cup V' \neq V$，即S满足(2).

若存在满足(1)，(2)，(3)的S. A是满足(1)，(2)，(3)的极大顶子集，因为F的边之头皆在V'中，故

$$\delta_{G-F}(A \cup V') = \delta_G(A \cup V') \geqslant k.$$

由(3)，

$$\delta_{G-F}(A \cup V') > \delta_{G-F}(A).$$

这个不等式指出，在G-F中存在一条边$e=xy$，$e \in (A \cup V',$

$A\cap V'$)，但$e\in(A,\bar{A})$。所以$x\in A\cap V'$，$y\in\bar{A}\cap\bar{V}'$。下面证明$F+e$满足(i)与(ii)。

(i) 自然满足。

设$S\subset V$，$S\neq V$，$a\in S$，$e\notin(S,\bar{S})$，则

$$\delta_{G-(F+e)}(S)=\delta_{G-F}(S)\geq k-1. \qquad (2)$$

设$e\in(S,\bar{S})$，对V的每两个子集S与A，

$$\delta_{G-F}(S\cup A)+\delta_{G-F}(S\cap A)\leq\delta_{G-F}(S)+\delta_{G-F}(A). \qquad (3)$$

由以上的式（2）与式（3）及$\delta_{G-F}(A)=k-1$，$\delta_{G-F}(A\cap S)\geq k-1$，得

$$\delta_{G-F}(S\cup A)\leq\delta_{G-F}(S). \qquad (4)$$

又$x\in S$，$x\notin A$，知S不是A的子集，于是$|S\cup A|>|A|$；又$y\in\bar{S}$，$y\in\bar{A}$，$y\in\bar{V}'$，所以，$S\cup A\cup V'\neq V$。由A之极大性，$\delta_{G-F}(S\cup A)\geq k$，$\delta_{G-F}(S)\geq k$，故$\delta_{G-(F+e)}(S)\geq k-1$，即证得（ii）满足。**证毕。**

上述证明是构造性的，它提供了k个外向弱独立同根生成树的求法。

定理 4　设G是有向图，且$\lambda(G)\geq k>0$，则$\forall u,v\in V(G)$，及$\forall l\in\{0,1,2,\cdots,k\}$，存在$u$到$v$的$l$条弱独立有向轨，同时存在$v$到$u$的$k-l$条弱独立有向轨。

证　构成辅助图$\bar{G}$如下：图G上加上新顶a，从a到u加l条平行的新边，从a到v加$k-l$条平行的新边。若能证明$\bar{G}$中

$$\min_{w\in V(G)} M(a,w)=k,$$

由定理3，可以在$\bar{G}$中找到以a为根的k棵外向弱独立生成树，由$\bar{G}$之构造知定理4成立。

由所加k条新边可知，$\min_{w\in V(G)} M(a,w)\leq k$，下证"<"号不成立。若$\min_{w\in V(G)} M(a,w)<k$，则存在$S\subset V(G)\cup\{a\}$，$|(S,\bar{S})|<k$，$a\in S$，显然$S\neq\{a\}$。令$x\in S-\{a\}$，$y\in\bar{S}$，由于$|(S,\bar{S})|<k$，

得 $M(x,y)<k$，此与 $\kappa'(G)\geq k$ 矛盾。**证毕。**

推论 3 G**是有向图，**$\kappa'(G)\geq 2$**，则**G**上任二顶在某个有向回路上。**

12.4 二 分 图

12.4.1 二分图的次数序列

设 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是两个非负整数序列，是否存在二分图（单图）G，其顶划分为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，使得 $d(x_i)=p_i$，$d(y_j)=q_j$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$？

若上述问题得到肯定回答，则称 (p,q) **被二分图**G**实现。**显然，(p,q)被二分图实现的必要条件是

$$\sum_{i=1}^{m} p_i=\sum_{j=1}^{n} q_j. \qquad (1)$$

但（1）不是(p,q)可由二分图实现的充分条件，例如

$p=(5,4,4,2,1)$，$q=(5,4,4,2,1)$，

虽满足（1），但没有二分图能实现(p,q)。

定理 5 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ **是满足（1）的非负整数列，且** $q_1\geq q_2\geq\cdots\geq q_n$，$(p,q)$ **可由二分图实现的充要条件是**

$$\sum_{i=1}^{m}\min\{p_i,k\}\geq\sum_{j=1}^{k} q_j,\quad 1\leq k\leq n. \qquad (2)$$

证 令$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是$K_{m,n}$的顶划分，把$K_{m,n}$定向，每边都从X指向Y，得有向图G。把G中每边的容量定为1，X为源集合，Y为汇集合，x_i的供应量为p_i，y_j的需求量为q_j。考虑此网络N上有供需约束的可行流问题。

对G的每个生成子图，对应地有一个N上的流，使此子图上每一边皆满载，且此对应是一一的．由（1）知，(p,q)可由二分图实现的充要条件是N上有可行流．

下面利用第11章定理4证明N内有可行流的充要条件是（2）式成立。

对于$S\subset V(G)$，令

$I(S)=\{i\,|\,x_i\in S\}$，$J(S)=\{j\,|\,y_j\in S\}$，

由定义，

$$C(S)=\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)=|I(S)|\cdot|J(\bar{S})|,$$

$$\sigma(X\cap S)=\sum_{i\in I(S)}p_i, \tag{3}$$

$$\rho(Y\cap\bar{S})=\sum_{j\in J(\bar{S})}q_j.$$

设N中有可行流，由第11章定理4和（3），

$$|I(S)|\cdot|J(\bar{S})|\geqslant\sum_{j\in J(\bar{S})}q_j-\sum_{i\in I(S)}p_i.$$

取$S=\{x_i\,|\,p_i>k\}\cup\{y_j\,|\,j>k\}$，于是

$$\sum_{i\in I(S)}\min\{p_i,k\}\geqslant\sum_{j=1}^{k}q_j-\sum_{i\in I(\bar{S})}\min\{p_i,k\},$$

因此（2）成立。

反之，若（2）式成立，S是$V(G)$的任一子集，由（2）与（3），

$$C(S)\geqslant\sum_{i\in I(S)}\min\{p_i,k\}\geqslant\sum_{j=1}^{k}q_j-\sum_{i\in I(\bar{S})}\min\{p_i,k\},$$
$$\geqslant\rho(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap S),$$

其中$k=|J(\bar{S})|$，由第11章定理4，N有可行流．**证毕**。

从算法的角度判断(p,q)可否由某二分图来实现，等价于定

理5证明中的网络N是否有可行流，又由第11章定理4的证明，这又等价于第11章定理4证明中N'上是否有使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载的最大流．至此，我们搞清楚了：先求N'的最大流，若使$(Y,\{y_0\})$边皆满载，则此流标志了一个(p,q)的实现过程，所需的二分图之边仅取流值为1的边．

12.4.2 二分图上的匹配

这一段我们用网络流技术求二分图上的最大匹配，并给出Hall定理的一个简洁证明．

设$G(X,Y,E)$是一个二分图，构作一个网络$N(G(\bar{V},\bar{E}),c(e))$：

$$\bar{V}=\{s,t\}\cup V(G),\ s\text{为源},\ t\text{为汇};$$

$$\bar{E}=\{sx|x\in X\}\cup\{yt|y\in Y\}\cup\{xy|xy\in E(G)\}.$$

赋予容量$c(sx)=c(yt)=1$，$c(xy)=\infty$．

定理6 二分图中最大匹配的边数等于网络N中最大流之流量．

证 设M是一个最大匹配，对M中的每个边xy，通过有向轨$sxyt$，从s到t流过1个单位．显然，对M中的不同边，这种有向轨是独立的，故最大流流量$F\geqslant|M|$．

设f是N上的整值流函数，所有从s到t的有向轨皆形如$sxyt$，若它从s到t运送一个流量，则不会再有边xy'或$x'y$能被用来通过流量．故使得$f(xy)=1$的边xy之集合形成$G(X,Y,E)$的一个匹配，于是$|M|\geqslant F$，从而$|M|=F$．**证毕．**

上述定理告诉我们求网络N上的最大流f，使得$f(xy)=1$的边之集合即为G的一个最大匹配．

下面利用双最定理证明Hall婚配定理．

定理(Hall) G是二分图，顶划分为X与Y，G中存在把X中顶皆许配的匹配之充要条件是，对一切$S'\subseteq X$，$|N(S')|\geqslant|S'|$．

证 设G中无把X中顶皆许配的匹配，沿用定理6的记号，最大流量$F=|M|$，M是G中最大匹配，但$|M|<|X|$。设S是2F算法结束时被标志的顶集合，则$(S,\bar{S})$是最小截。又一切形如xy的边容量为∞，令$S'=X\cap S$，$N(S')\subset S$，又无$Y-N(S')$中的顶被标志，于是我们有

$$(S,\bar{S})=(\{s\},\ X-S')\quad(N(S'),\{t\}).$$

又$|(S,\bar{S}|=|M|<|X|$，于是

$$|X-S'|+|N(S')|<|X|,$$

即$|N(S')<|S'|$。

反之，若G中有把X中顶皆许配的匹配，显然对每个$S'\subseteq X$，$|N(S')|\geqslant|S'|$。**证毕**。

12.5 关于PERT的两个问题

PERT是规划审核技术的代号（Program evalnation and review technique），它是运筹学中的典型问题之一。

PERT图是指这样的一个有向图$G(V,E)$：

(i) $V(G)$**中存在起始顶**s**与终止顶**t。

(ii) G**中无有向回路，**

(iii) $\forall v\in V(G)-\{s,t\}$，$v$**在某条由**$s$**到**$t$**的有向轨上。**

约定：

(1) PERT图上的每一边代表一个过程。

(2) $\beta(s)$中的过程可以马上开始。

(3) $v\in V(G)$，$v\neq s$，当$\alpha(v)$中的过程全结束时，$\beta(v)$中的过程才能开始。

问题1（关键轨道问题） 设PERT图每边e之权$l(e)$表示该过程所需时间，问由$\beta(s)$中过程开始的时刻到$\alpha(t)$中过程全部完成，最短需要多长时间？

例如图 12.1 中的最短完成时间为 $3+2+5=10$。

PERT**最短时间算法**：

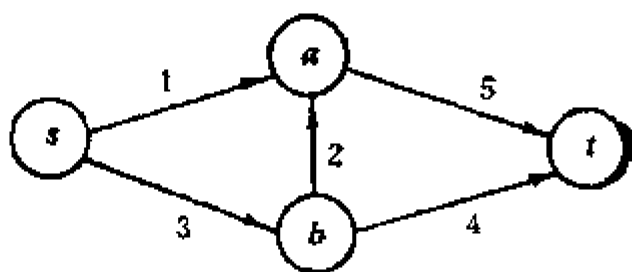


图 12.1

（1）$\lambda(s)\leftarrow 0$，其它的顶未标志。

（2）找一个$v\in V(G)$，v 未标志，且$\alpha(v)$中一切边之尾已标志，令
$\lambda(v)\leftarrow \max\limits_{e=uv}\{\lambda(u)+l(e)\}$。

（3）若$v=t$，止，$\lambda(t)$即为所求，否则转（2）。

上述算法的时间复杂度为$O(|E|)$。

定理 7 PERT **最短时间算法止时得到的**$\lambda(t)$**为问题 1 的解.**

证 先证（2）中 v 的存在性。若这种 v 不存在，则对每个未标志之顶 v，皆可找到一边，以 v 为头，但此边以另一未标志之顶为尾。又顶数有限。则 G 中存在有向回路，这是不可能的。

下证$\lambda(v)$是到完成 $\alpha(v)$中一切过程所用的最小时间。用标志次数进行归纳证明。第一次标志的是 s，命题自然成立。设第 k 次标志的是 v_k，$\lambda(v_k)$是 $\alpha(v_k)$中过程全部完成所用的最小时间；设 v_{k+1} 是第 $k+1$ 次标志的顶，由（2），显然

$$\max_{e=uv_{k+1}}\{\lambda(u)+l(e)\}$$

是到 $\alpha(v_{k+1})$ 中过程全完成所用的时间之最小值。**证毕.**

容易看出，当算法停止时，自 t 向 s 经过“确定顶标的边”返回，即经

$$\lambda(v)\leftarrow\max_{e=uv}\{\lambda(u)+l(e)\}$$

中使 $\lambda(u)+l(e)=\lambda(v)$的边 e 返回，则得一最长轨，这种最长轨叫做**关键轨短**。欲缩短工期，必须把每条关键轨道至少一条边之长缩短。关键轨道未必唯一，例如图 12.1 中 $sbat$ 是一条关键

轨道。

上述缩短工期的方法通常称为CPM (Critical Path method)，即**关键轨道方法**。

问题 2 PERT中每一过程由一台机器（或人）来完成，问需要最少准备多少台机器，才能使得对任意给定的$l(e)$，每一过程都不至于因为机器不够而被延误?

为解决问题2，我们考虑以s为源，以t为汇的PERT图上的一个网络，边容量下界是1，上界为∞。

下面我们称一个边子集为**并流边集合**，若此集合中没有在同一有向轨上的两条边。

由于PERT中每边皆在由s到t的有向轨上，以及$u(e)=1$，$c(e)$ ∞知我们的网络上有可行流，所以有从s到t的最小流。

定理 8 以s为源以t为汇，$b(e)=1$，$c(e)=\infty$的PERT图上的网络上的最小流量即为问题2的解。

证 让我们以t为源，以s为汇，求由t到s的最大流，它恰为由s到t的最小流。当求由t到s的最大流时，2F算法终止时被标志的那些顶之集合为T，则$t\in T$，$s\in \bar{T}$。于是$(T,\bar{T})=\varnothing$，不然，因$c(e)=\infty$，仍可由T中的某顶向前标志，与2F标志终止矛盾。所以$(\bar{T},T)$是并流边集。

若$(\bar{T},T)$中有的边之权$l(e)\gg 1$，$(\bar{T},T)$外的边之权$l(e)$比$(\bar{T},T)$中最小权还小得多，所以会有$(\bar{T},T)$中边代表的过程同时进行的时刻。故机器数$\geqslant|(\bar{T},T)|$。

设F是从s到t最小流量，相应的流为f，$f(e)\geqslant b(e)=1$对每一边$e\in E(G)$成立。F个单位的总流量分解到从s到t的F条有向轨上，能使$E(G)$中的每条边至少在这F条有向轨的一条上。我们把每台机器分配给上述F条有向轨中之一条轨上的所有边，每个机器在分配去的有向轨上从s到t依次完成各个过程，于是得知机器数$\leqslant F$（图12.2）。而$F=|(\bar{T},T|$，故得证问题

2 中的机器至少为 s 到 t 的最小流量 F，证毕。

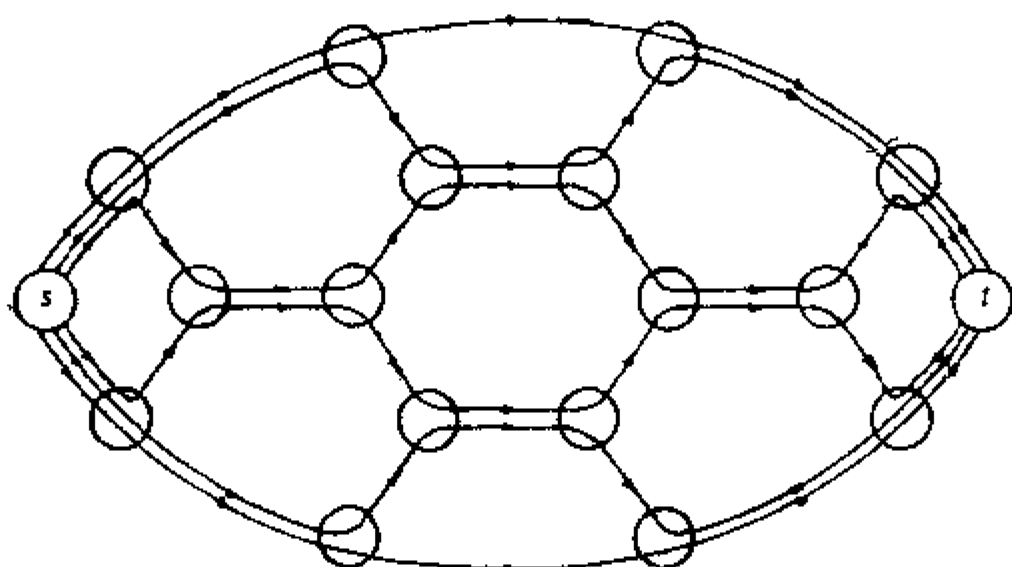


图 12.2

本章用求最大流的有效算法求得了无向图的连通度与边连通度及有向图的连通度与边连通度，并且建立了一批Menger型定理 ($N(a,b)=p(a,b)$ ($ab\overline{\in}E(G)$)，$M(a,b)=p'(a,b)$，$\kappa(G)=\min\limits_{a,b\in V}p(a,b)$，$\kappa'(G)=\min\limits_{a,b\in V}p'(a,b)$)。这些 Menger 型定理是图论的一组基本定理，从中可以推导出许多重要结论，例如 k 连通图的扇形结构与圈结构，有向图中的弱独立同根外向生成树的存在及个数等等。

网络流技术还可以求取二分图中的最大匹配，以及判别与实现二分图的次数序列，同时对某些定理（例如Hall定理）提供简洁的新证明。

最后我们用求最大流的方法解决了 PERT 中的一个重要问题。

习　　题

1．用 12.1 的定理 1 证明匹配理论中的König 定理。

2. 证明(p,q)不能由二分图来实现，其中$p=(5,4,4,2,1)$，$q=(5,4,4,2,1)$.

3. 七种设备用五架飞机运往目的地，每种设备各有四台，五架飞机的容量分别为8，8，5，4，4台，问能否有一种装机方案，使同种设备不会有两台同在一架飞机上？若飞机容量分别为7，7，6，4，4台时，又怎样？

4. 今有张、王、李、赵四人小乐队和小提琴、大提琴、钢琴、吉他四种乐器，张善于演奏小提琴、大提琴和吉他；王善于大提琴和钢琴；李善于小提琴和大提琴；赵只会弹吉他. 今四人同台演出，每人演奏一种乐器，试求每人各演奏一种乐器时所有不同方案. 试把这一问题化成网络最大流问题.

5. G是没有有向回路的有向图，欲求一个无公共顶点的有向轨道的最小条数，使这些轨道覆盖一切顶，这种轨道可以从任何一顶始而止于任何顶，也可以长为0.

(a) 叙述一个解此问题的算法.

(b) 指出G中没有有向圈的条件是否必要.

(c) 给出你的算法的时间复杂度.

6. 上题中，把"无公共顶"的要求删去，解决上题中同样的(a)，(b)，(c)三个问题.

两个顶u与v叫做**无逆流**的，若无从u到v或无从v到u的有向轨道. 一个**无逆流顶集**是指此集中任二顶皆为无逆流的. 证明覆盖轨道的最小数目等于最大无逆流顶集之顶数.

7. (a) $G(X,Y,E)$是二分图，写出一个有效算法求出一个最小边子集$E'\subseteq E$，使得每顶皆为E'中至少一条边之端点.

(b) 给出你的算法的时间复杂度.

(c) 证明这个覆盖顶的E'满足$|E'|=\beta(G)$，其中$\beta(G)$是G的独立数.

8. (a) $G(X,Y,E)$是完全二分图，则

$$\kappa(G)=\min\{|X|,|Y|\}.$$

(b) 证明对每个k，存在一个图G，使得$\kappa(G)\geq k$，且G无Hamilton轨。

9. 设M是二分图G的一个匹配，则存在一个最大匹配M'，使得被M许配的每个顶也被M'许配。

10. G是无圈有向图，恰有一个顶s，$d^-(s)=0$，恰有一个顶t，$d^+(t)=0$，称边$e_1=ab$优于边$e_2=cd$，当且仅当G中有从b到c的有向轨道。一个边子集叫做一个"片"，若它之中无比另一边为优的边，且它是极大的。P是边子集，证明下述三个命题等价：

（1）P是一个片。

（2）P是(s,t)边分离集，P中没有比其它边为优的边。

（3）对某$\{s\}\subset S\subset V-\{t\}$的$S$，$P=(S,\bar{S})$，使得$(\bar{S},S)=\varnothing$。

11. $S_1,S_2,\cdots,S_m$为有限集，集合$\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$叫做相异样品组（SDR），若对每个i，$1\leqslant i\leqslant m$，$e_i\in S_i$。

(a) 若SDR存在，写出一个求SDR的有效算法。

(b) 证明SDR存在的充要条件是对任意的$k(1\leqslant k\leqslant m)$个集合之并，至少含$k$个元素。

12. π_1与π_2是m个元素的一个集合之划分，每个之中恰含r个两两不交的子集，欲求r个元素的一个子集，使得π_1与π_2的每个子集都被表征。

(a) 给一个有效算法判断这样的r个样品的集合是否存在。

(b) 与Hall婚配定理相似地建立一个这种样品集合存在的充要条件。

13. 有向图叫做完全连通的，若它是一个竞赛图。完全连通有向图是可分的，若$V(G)$可划分成A与B两个非空子集，使得A与B之间的边皆从A到B。令$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，且

$$d^+(v_1)\leqslant d^+(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d^+(v_n),$$

则G是可分的完全连通有向图的充要条件是存在$k<n$，使得

$$\sum_{i=1}^{k} d^{+}(v_i) = \binom{k}{2}.$$

14．S 是人的集合，$|S| \geqslant 4$，每四个人中总有一人与其余三人相识，则 S 中有一人，他与 S 中的每个人相识．

15．在学校里，有 n 个男同学 n 个女同学，每个同学恰认识 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个异性同学，证明全体同学可参加一次舞会，使每对舞伴皆相识，而且可以组织 k 场舞会，使得每人皆与每个相识者恰跳一次舞．试用网络流方法证明此题．

16．证明或反驳：若有向图 G，$\kappa(G) \geqslant 2$，则对每三个顶 x, y, z，存在一个从 x 经 y 到 z 的有向轨．

17．G 是无向图，$\kappa'(G) \geqslant 2$，则：

(a) 对每三个顶 x, y, z，，存在一个行迹，从 x 经 y 到 z．

(b) 对每三个顶 x, y，z，存在一个行迹从 x 到 z 不经过 y．

18．在图 12.3 所示的无有向回路的有向图中，既有 AND顶（∧），也有 OR 顶（∨），正如 PERT 中一样，边表示过程，边长是过程所用时间（写在每边旁），当所有（至少一个）进入的

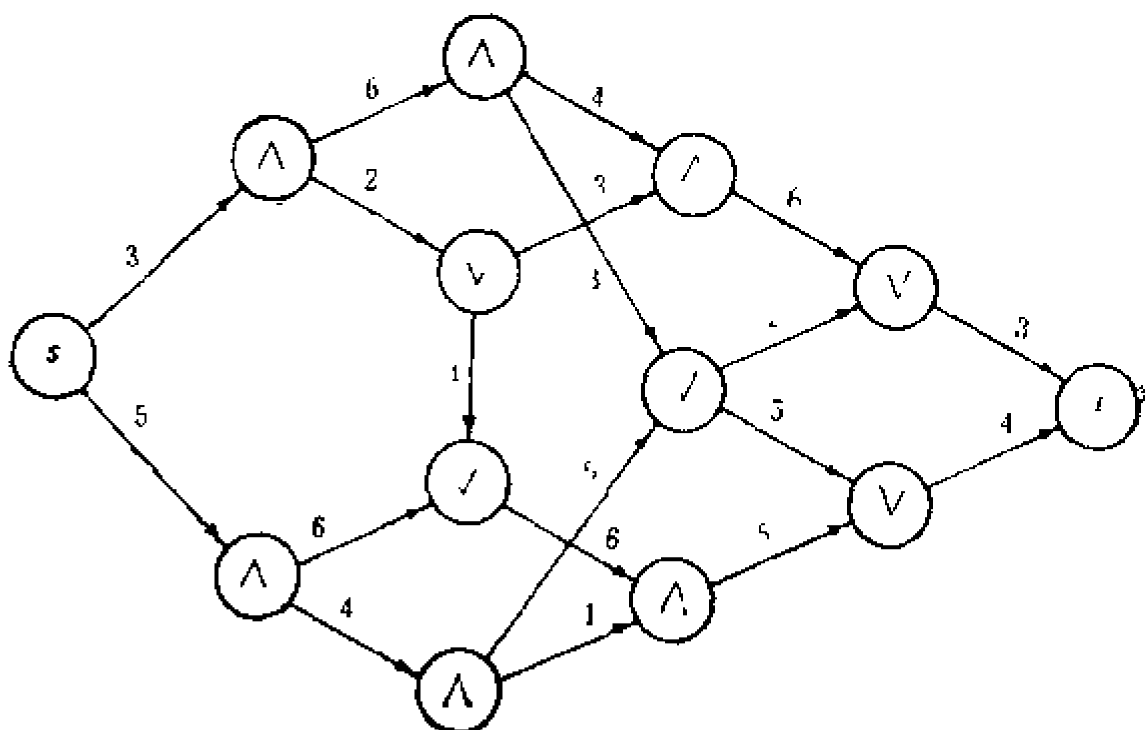


图 12.3

过程完成时，从一个 AND(OR)顶出发的过程才可开始。写出一个算法，求从开始（于 s 顶）到结束（于 t 顶）所用的最少时间。且把你的算法在图 12.3 中应用.并指出你的算法的时间复杂度.

19. 在未必无有向回路的有向图上考虑上题，你应如何修改你的算法或指出无解？

20. $k\in N$，$l(k)$是从图G上删除k个顶所得子图的边连通度之最小值，讨论函数$l(k)$的定义域单调性和极值；若$\kappa(G)=4$，$\kappa'(G)=5$，$l(1)=2$，$l(2)=3$是否成立？

13 无向图中的空间与矩阵

13.1 圈 空 间

令$F_2=\{0, 1\}$，在F_2上定义加法$\oplus$与乘法"$\cdot$"如下：

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

于是$\langle F_2, \oplus\rangle$是 Abel 群，$\langle F_2-\{0\}, \cdot\rangle$也是 Abel 群，且乘法对于加法有分配律，故$\langle F_2, \oplus, \cdot\rangle$是一个域，称其为0 1 **二元域**，简写成$F_2$。

若$(q_1, q_2, \cdots, q_n)$与$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$两个向量中q_i，$r_i \in F_2$，则定义

$$(q_1, q_2, \cdots, q_n)\oplus(r_1, r_2, \cdots, r_n)=(q_1\oplus r_1, \cdots, q_n\oplus r_n).$$

例如$(1, 1, 1)\oplus(1, 1, 1)=(0, 0, 0)$.

本章中把一个图或子图写成0-1向量的形式，利用线性代数的方法研究（0-1向量对应的）图的性质。

设G是给定的标志图，$E(G)=\{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$，任意取$Q\subseteq E(G)$，令

$$q_i=\begin{cases}1, & e_i\in Q,\\ 0, & e_i\overline{\in} Q,\end{cases}$$

记
$$Q=(q_1, q_2, \cdots, q_\varepsilon),$$

于是Q的全体子图组成的集合在0-1二元域F_2上构成一个ε维的线性空间，记这个空间为$\mathscr{E}(G)$，称为G的**边子集空间**，简称边空

间. $\mathscr{E}$中有 2^{ε} 个向量，(1, 0, 0, …, 0)，(0, 1, 0, 0, …, 0)，…，(0, 0, …, 0, 1) 是它的一组基.

定义 1 量T是连通图G的生成树，设e是余树的一条边，则$T+e$上有唯一的一个圈，这个圈叫做G的基本圈，关于生成树T的全部基本圈C_1, C_2, …, $C_{\varepsilon-\nu+1}$叫做G的一个基圈组.

定理 1 $E(C_1)$, $E(C_2)$, …, $E(C_{\varepsilon-\nu+1})$ 作为$\mathscr{E}$中的$\varepsilon-\nu+1$个向量是线性无关的，其中C_1, C_2, …, $C_{\varepsilon-\nu+1}$是G的关于生成树T的基圈组.

证 因每一基圈含有其它基圈不含的边，故得

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon-\nu+1} a_i C_i = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0 \quad (i=1,2,\cdots,\varepsilon-\nu+1).$$

其中$a_i \in F_2$，故$E(C_1)$, …, $E(C_{\varepsilon-\nu+1})$是线性无关组，证毕.

本章中边子集Q，Q在$\mathscr{E}$中的向量形式以及$G[Q]$可以认为是一回事.

我们把图G中无公共边的圈之并与零向量组成的集合记成$\mathscr{C}(G)$

定理 2 $\mathscr{C}(G)$ 在域F_2上构成线性空间.

证 只需证明，$\forall B_1, B_2 \in \mathscr{C}(G)$，有$B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$，则容易验证$\mathscr{C}(G)$满足在$F_2$上构成线性空间的一切条件. 下证$B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$.

(1) B_1或B_2为0时，结论自然成立.

(2) B_1与B_2皆非0，考虑B_1与B_2中有无公共边，分两种情形讨论.

(i) 对每个i，$1 \leqslant i \leqslant \varepsilon$，$B_1$与$B_2$的第$i$分量不同时为1，则$B_1 \oplus B_2$图中每顶皆偶次，其连通片是Euler图. 由Euler图的性质，$B_1 \oplus B_2$的每个连通片，进而$B_1 \oplus B_2$本身是无公共边的圈之并，即$B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$.

(ii) 若有些同位置的分量在B_1与B_2中皆为1，则在B_1

$\oplus B_2$ 图中，与这几个分量1对应的边的端点的次数，比在 B_1 中与 B_2 中同一顶的次数之和少一个偶数，故 $B_1\oplus B_2$ 中每顶皆偶次，与（i）一样地知 $B_1\oplus B_2\in\mathscr{C}(G)$。**证毕。**

定理 3 **G 是连通图，则 $\mathscr{C}(G)$ 是 $\mathscr{E}$ 的 $e-v+1$ 维的线性子空间，关于任一生成树的基圈组是 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基底。**

证 只欠证 $\forall B\in\mathscr{C}(G)$，$B$ 是关于任一生成树 T 的基圈组的线性组合（组合系数取自 F_2）。事实上，$B=\mathbf{0}$ 时，结论自然成立。下面考虑 $B\neq\mathbf{0}$，于是 B 图中至少有一条边是余树上的边。今设 e_{i_1}，e_{i_2}，…，e_{i_k} 是 B 图中余树上的边之全体，它们对应的基圈分别为 C_{i_1}，C_{i_2}，…，C_{i_k}，令

$$B'=\sum_{j=1}^{k}C_{i_j},$$

这里 Σ 中的加法是 $\oplus$。由定理 2，$B'\in\mathscr{C}(G)$，$B'\oplus B\in\mathscr{C}(G)$；若 $B'\oplus B\neq\mathbf{0}$，即 $B+B'$ 对应的图只含有生成树上的边，由 $\mathscr{C}(G)$ 之定义，这是不可能的，只有 $B\oplus B'=\mathbf{0}$，于是 $B=B'$ $=\sum_{j=1}^{k}C_{i_j}$。**证毕。**

以后我们称 $\mathscr{C}(G)$ 为图 G 的圈空间。

若 G 有 ω 个连通片，显然 $\mathscr{C}(G)$ 的维数为 $e-v+\omega$。连通图 G 的圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 中有 2^{e-v+1} 个向量；不连通的图，$\mathscr{C}(G)$ 中的向量个数为 $2^{e-v+\omega}$；事实上，对于连通图而言，因为 $\mathscr{C}(G)$ 中每个向量由 $e-v+1$ 个基向量线性表出，在线性表达式中，每个基向量的组合系数有 0 与 1 两种选择，故 $|\mathscr{C}(G)|=2^{e-v+1}$。

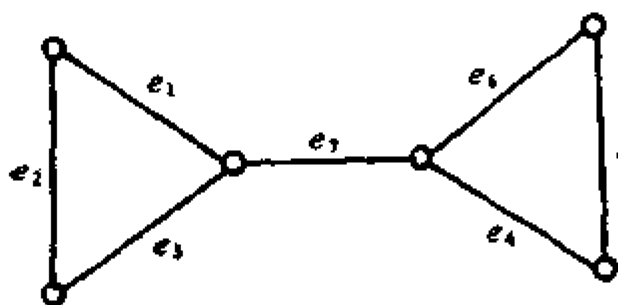


图 13.1

例 1 求图 13.1 中图 G 的圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 中的全体向量，并画出相应的子图。

解 $e=7, v=6$，$\mathscr{C}(G)$ 中有 $2^{e-v+1}=2^2=4$ 个向量，取生成树为 $T=G-\{e_2, e_5\}$，则有 $e-v+1=2$ 个基圈：

$C_1=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$，$C_2=(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$.
除 C_1，C_2 外，$\mathscr{C}(G)$ 中还有 **0** 向量：

$$\mathbf{0}=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\ .$$

第四个向量是 B：

$$B=C_1\oplus C_2\quad(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)\ .$$

这三个非零向量相应的子图如图 13.2

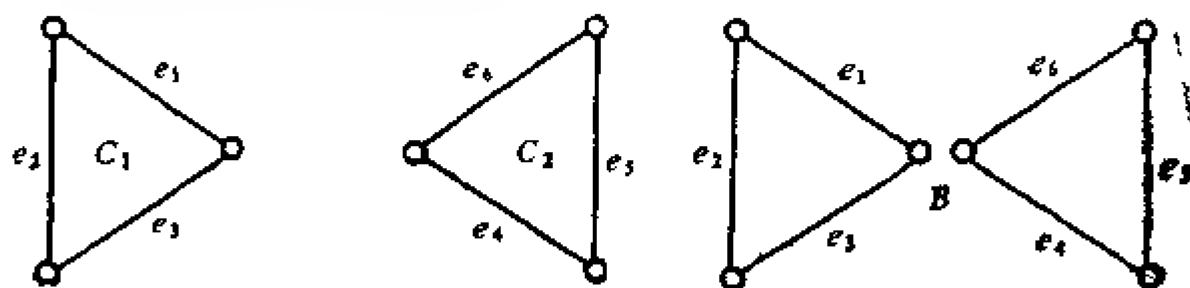


图 13.2

13.2 断集空间

本节只讨论连通无向图。

定义 2 $S\subseteq E(G)$，G **为连通图，** $G-S$ **有两个连通片，但从** G **中删除** S **的任何真子集，仍得到连通图，则称** S **是** G **的一个割集。**

在割集定义中，要特别注意它的极小性，S 这个集合再缩小就割不断连通图 G 了。

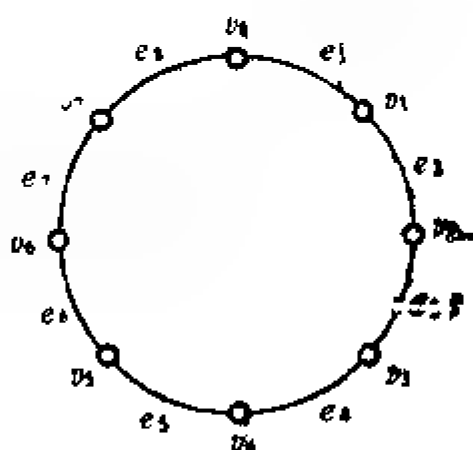


图 13.3

例如图 13.3 中，$\{e_1, e_3, e_5\}$ 不是割集，因为 $G-\{e_1, e_3, e_5\}$ 有三个连通片；$\{e_1\}$，$\{e_3\}$ 或 $\{e_5\}$ 也不是割集，因为 $G-\{e_1\}$，$G-\{e_3\}$，$G-\{e_5\}$ 仍连通，而 $G-\{e_1,\ e_3\}$ 有两个连通片，又 $\{e_1,\ e_3\}$ 已是极小化，故 $\{e_1,\ e_3\}$ 是一个割集。在此图上，任意两条边皆构成一个割集。

定义 3 V_1 **是连通图**G**的非空顶真子集，即** $V_1 \neq \varnothing$，$V_1 \subset V(G)$，**一端在** V_1，**另一端在** $\overline{V}_1$ **的边组成的集合，记成** $(V_1, \overline{V}_1)$，$(V_1, \overline{V})$ **叫做**G**的一个断集.**

由定义，割集是断集，反之未必成立. 例如图 13.3 中，$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$是断集 $(\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\})$，但它不是割集，"大"了一些.

我们把连通图G中的一切断集与 0 向量组成的集合，记成 $\mathscr{S}(G)$.

定理 4 $\mathscr{S}(G)$ **在域** F_2 **上构成线性空间.**

证 只需证明，若 $S_1, S_2 \in \mathscr{S}(G)$，则 $S_1 \oplus S_2 \in \mathscr{S}(G)$. 不妨设 $S_1 \neq S_2$，不然 $S_1 \oplus S_2 = 0 \in \mathscr{S}(G)$. 令 $S_1 = (V_1, \overline{V}_1)$，$S_2 = (V_2, \overline{V}_2)$，$V_{11} = V_1 \cap V_2$，$V_{22} = \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$，$V_3 = V_{11} \cup V_{22}$，由图 13.4 知

$$S_1 \oplus S_2 = (V_3, \overline{V}_3) \in \mathscr{S}(G).$$

事实上，S_1 中的边有图中上半部分的四种类型，S_2 中的边有下半部的四种类型，经$\oplus$运算后，$S_1 \oplus S_2$ 中的边只是图中粗实线类型的，它们恰为 $(V_3, \overline{V}_3)$. **证毕.**

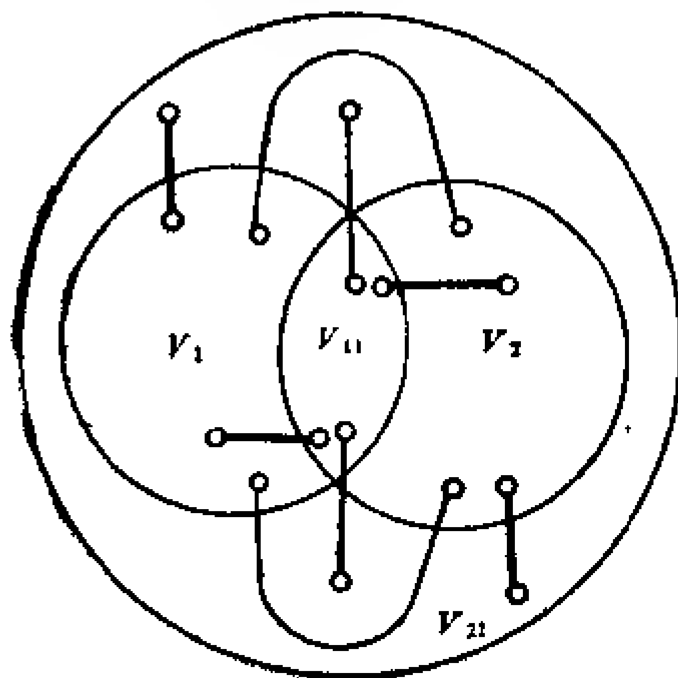


图 13.4

以后把 $\mathscr{S}(G)$ 称为连通图G的**断集连间.**

显然，割集与断集中至少有一条边是生成树上的边.

定义 4 **连通图**G**的含且仅含生成树**T**的一条边之割集，叫做**G**的关于**T**的基本割集，关于**T**的基本割集之全体** $S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-k}$ **叫做**G**的关于生成树**T**的基本割集组.**

定理 5 连通图G的断集空间 $\mathscr{S}(G)$ 的维数是$\nu-1$，对于任给的生成树T，关于T的基本割集组 S_1，S_2，…，$S_{\nu-1}$是 $\mathscr{S}(G)$ 的一组基。

证 与定理1相似地，容易证明 S_1，…，$S_{\nu-1}$ 是线性无关的。只需证明 $\forall S\in\mathscr{S}(G)$，$S$ 可由 S_1，…，$S_{\nu-1}$ 线性表出。

事实上，因S是断集，S上有T中之边，令 $S=\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}; e_{i_{k+1}}, \cdots, e_{i_n}\}$，前$k$条边是生成树$T$上的。令 S_{i_j} $(j=1,2,\cdots,k)$ 是含 e_{i_j} 的基本割集，由于$\mathscr{S}(S)$ 是线性空间，$S_{i_j}\in\mathscr{S}(G)$，故

$$S'=\sum_{j=1}^{k}S_{i_j}\in\mathscr{S}(G).$$

且

$$S''=S+S'\in\mathscr{S}(G),$$

但S''中已不含T上之边，则S''不是断集，因为断集中至少有一条树边，所以$S''=0$；于是

$$S=S''=\sum_{j=1}^{k}S_{i_j}.$$

证毕。

$\mathscr{S}(G)$ 中一共有 $2^{\nu-1}$ 个向量。

例 2 求图13.5中的图G之断集空间 $\mathscr{S}(G)$ 的一组基底和$\mathscr{S}(G)$ 中的一切向量，并画出相应子图。

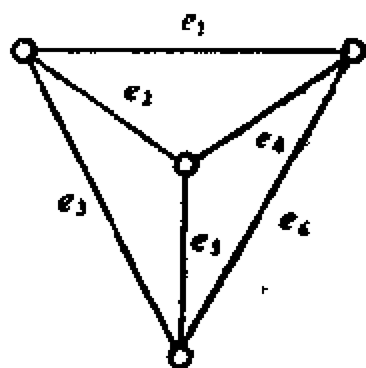


图 13.5

解 $\nu=4$，$\mathscr{S}(G)$ 中有 $2^{\nu-1}=2^3=8$ 个向量，其中3个是基向量，一个是0向量。我们取生成树为 $G[\{e_1,e_2,e_3\}]$，相应的三个基本割集为 S_1，S_2，S_3：
$S_1=(1,0,0,1,0,1)$，$S_2=(0,1,0,1,1,0)$，$S_3=(0,0,1,0,1,1)$。

由基底线性表出的其它5个向量为：

$$S_4=S_1\oplus S_2=(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1),$$
$$S_5=S_1\oplus S_3=(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0),$$
$$S_6=S_2\oplus S_3=(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1),$$
$$S_7=S_1\oplus S_2\oplus S_3=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$S_8=0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3=\mathbf{0}=(0,0,0,0,0,0).$$

S_1—S_7的相应子图见图13.6。

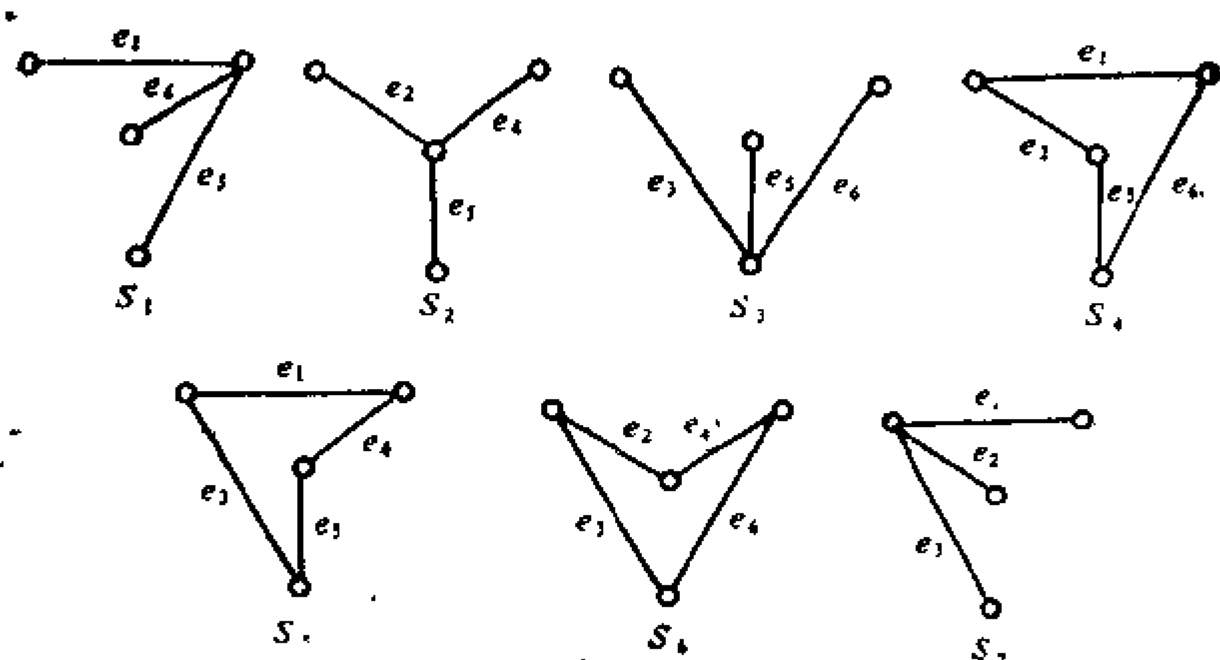


图 13.6

我们看到，$\mathscr{C}(G)$ 与 $\mathscr{S}(G)$ 可能有相同的非零向量，断集可能是圈，例如例2中的 S_4，S_5，S_6。

作为$\mathscr{E}(G)$ 的两个子空间$\mathscr{C}(G)$ 与 $\mathscr{S}(G)$ 是正交的。

定理 6 $\forall B\in\mathscr{C}(G)$，$\forall S\in\mathscr{S}(G)$，**则有正交性**

$$B\cdot S=0,$$

其中G是连通图，"·"是向量的数量积（在F_2中）。

证 若B与S中有$\mathbf{0}$，则结论自然成立。若 $B\neq\mathbf{0}$，$S\neq\mathbf{0}$，因为圈若与断集有公共边，则公共边的条数必为偶数，所以B与S中同序号分量皆为1的现象发生偶数次，从而知 $B\cdot S=0$；事实上，这时，$B\cdot S$ 的运算中只发生同序号皆为1的两分量的积1

的求和，同序号的分量有零时只算出0，而这偶数个1相加仍得0。证毕。

13.3 关联矩阵

定义 5 G**是单图，**G**的关联矩阵** $B(G)$**是如下的矩阵** $B(G)=(b_{ij})_{v\times\varepsilon}$，**其中**

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 相关联},\\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联},\end{cases}$$

$v_i\in V(G)$，$e_j\in E(G)$。

例如K_4的关联阵为

$$B(K_4)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right]\end{array}.$$

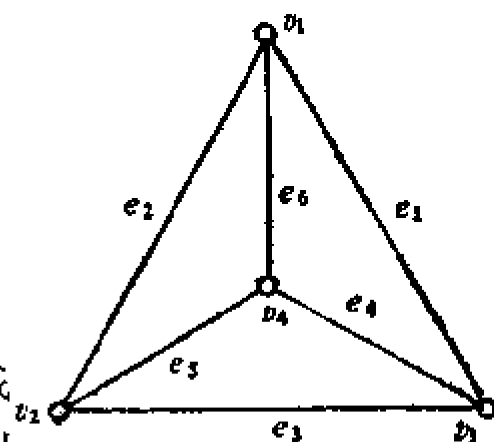


图 13.7

每个标志图有唯一的关联矩阵，反之，若给出一个图的关联矩阵，我们可以依据此矩阵把相应的图画出来，可见关联矩阵中已含有相应的图的一切信息，原则上，通过图的关联矩阵的研究，应该得到图的一切性质。

一个0-1矩阵，每列恰有两个1，它必为某个图的关联矩阵；关联矩阵每行中1的个数是该行所对应的顶之次数。

关联矩阵的每一行都是$\mathscr{S}(G)$中的一个向量。

定义 6 **从单图**G**的关联矩阵中任意删除一行后所得之矩阵，叫做**G**的基本关联矩阵，记之为** $B_f(G)$。

定理 7 **连通图**G**的关联矩阵秩为** $v-1$。

证 因为关联矩阵的每一行皆$\mathscr{S}(G)$中的向量，所以$r(B)\leqslant$

$\nu-1$，下证 $r(B)\geqslant\nu-1$。反证之，若 $r(B)<\nu-1$，则 B 中任 $\nu-1$ 行线性相关，即对行向量 B_{i_1}，B_{i_2}，…，$B_{i_{\nu-1}}$，存在不全为 0 的常数，k_1，k_2，…，$k_{\nu-1}\in F_2$，使得

$$\sum_{j=1}^{\nu-1}k_jB_{i_j}=\mathbf{0}.$$

不妨设 k_1，…，$k_{\nu-1}$ 中前 m 个皆为 1，后面的皆为 0，$2\leqslant m\leqslant\nu-1$。不难看出，以 B_{i_1}，B_{i_2}，…，B_{i_m} 为行组成的 m 行 ε 列的子矩阵 $\bar{B}$ 每列恰有两个 1，或每列皆为 0。

我们把 $V(G)$ 划分成两个子集：$V_1=\{v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots,v_{i_m}\}$，$V_2=V-V_1$。由 $\bar{B}$ 的结构知，$(V_1,\ V_2)=\varnothing$，又 $V_1\cap V_2=\varnothing$，于是 G 不连通，与 G 为连通图矛盾。**证毕。**

定理 8　G 是连通图，则 $r(B_f(G))=\nu-1$。

定理 8 的证明与定理 7 的证明雷同。

推论 1　G 有 ω 个连通片，则

$$r(B(G))=r(B_f(G))=\nu-\omega$$

推论 2　G 是连通图的充要条件是

$$r(B(G))=r(B_f(G))=\nu-1.$$

定理 9　e_{j_1}，e_{j_2}，…，$e_{j_{\nu-1}}$ 是图 G 的生成树的边，当且仅当这 $\nu-1$ 条边在 $B_f(G)$ 中对应的列构成的行列式不为零。

证　设定理 9 所称的行列式对应的矩阵为 B_1，以 B_1 为基本关联矩阵的图为 $G[\{e_{j_1},\ e_{j_2},\ \cdots,\ e_{j_{\nu-1}}\}]$，它有 ν 个顶，$\nu-1$ 条边。又行列式 $|B_1|\neq0$，即 $r(B_1)=\nu-1$，由本节推论 2，$G[\{e_{j_1},\ e_{j_2},\ \cdots,\ e_{j_{\nu-1}}\}]$ 是连通图。又它的边数是顶数减 1，故 $G[\{e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{\nu-1}}\}]$ 是树，即它是 G 的生成树。

反之，若 e_{j_1}，…，$e_{j_{\nu-1}}$ 是 G 的生成树之边，$G[\{e_{j_1},\ \cdots,\ e_{j_{\nu-1}}\}]$ 的基本关联矩阵是 B_1，故 $r(B_1)=\nu-1$，B_1 为满秩方阵，故 $|B_1|\neq0$。**证毕。**

对于比较小的图，用定理9可以给出生成树的一个清单。

例 3 求出图13.7中所有的生成树。

解 取图13.7中K_4的一个基本关联矩阵如下：

$$B_f(K_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\;(e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6)},$$

$$\overset{e_1\ e_2\ e_3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=0,\quad \overset{e_1\ e_2\ e_4}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}=1,\quad \overset{e_1\ e_2\ e_5}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}=1,$$

$$\overset{e_1\ e_2\ e_6}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}=1,\quad \overset{e_1\ e_3\ e_4}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=1,\quad \overset{e_1\ e_3\ e_5}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=-1=1,$$

$$\overset{e_1\ e_3\ e_6}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{e_1\ e_4\ e_5}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{e_1\ e_4\ e_6}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=0,$$

$$\overset{e_1\ e_5\ e_6}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{e_2\ e_3\ e_4}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=1,\quad \overset{e_2\ e_3\ e_5}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=-1=1,$$

$$\overset{e_2\ e_3\ e_6}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=1,\quad \overset{e_2\ e_4\ e_5}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{e_2\ e_4\ e_6}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=1,$$

$$\begin{array}{c}e_2\ e_5\ e_6\\ \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0,\end{array}\quad \begin{array}{c}e_3\ e_4\ e_5\\ \begin{vmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=0,\end{array}\quad \begin{array}{c}e_3\ e_4\ e_6\\ \begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}=1,\end{array}$$

$$\begin{array}{c}e_3\ e_5\ e_6\\ \begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1=1,\end{array}\quad \begin{array}{c}e_4\ e_5\ e_6\\ \begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1=1.\end{array}$$

由上述$\binom{6}{3}=20$个行列式中考虑不为 0 者，知：

$\{e_1,e_2,e_4\}$, $\{e_1,e_2,e_5\}$, $\{e_1,e_2,e_6\}$, $\{e_1,e_3,e_4\}$,
$\{e_1,e_3,e_5\}$, $\{e_1,e_3,e_6\}$, $\{e_1,e_4,e_5\}$, $\{e_1,e_5,e_6\}$,
$\{e_2,e_3,e_4\}$, $\{e_2,e_3,e_5\}$, $\{e_2,e_3,e_6\}$, $\{e_2,e_4,e_5\}$,
$\{e_2,e_4,e_6\}$, $\{e_3,e_4,e_6\}$, $\{e_3,e_5,e_6\}$, $\{e_4,e_5,e_6\}$.

导出 16 个生成树。

这个结果符合 Caylay 公式 $\tau(G)=\nu^{\nu-2}=4^{4-2}=16$。

13.4 圈 矩 阵

本节只讨论连通图。

定义 7　由图G的每个圈上的边集在$\mathscr{E}(G)$ 中的向量为行

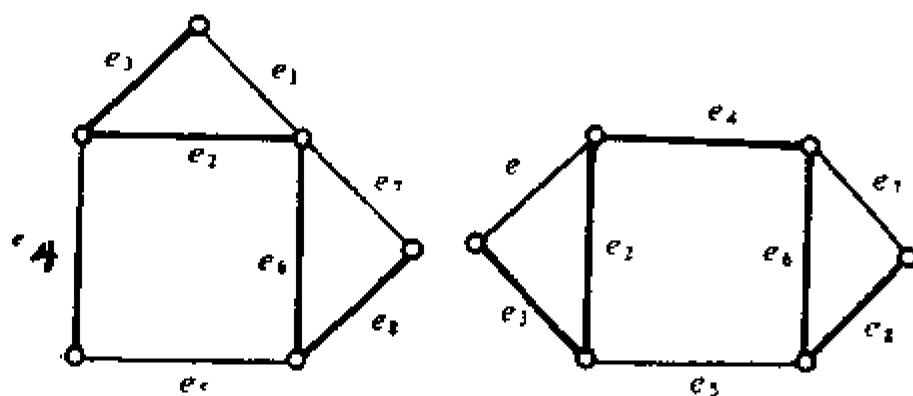


图 13.8

构成的矩阵叫做G的圈矩阵，记之为$C(G)$；取定生成树，由每个基本圈上的边集在$\mathscr{E}(G)$中的向量为行组成的矩阵叫做基本圈矩阵，记之为$C_f(G)$.

例如图13.8中的两个图，以$\{e_2,e_3,e_4,e_6,e_8\}$导出生成树，则得

$$C(G_1)=C(G_2)=\begin{matrix} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{matrix}\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

这个矩阵中前三行是$C_f(G_1)=C_f(G_2)$.

值得注意的是，这里G_1与G_2并不同构，但它们却有相同的圈矩阵与基本圈矩阵. 可见，凭圈矩阵或基圈矩阵不能确定一个图到同构的程度，这是$C(G)$与$C_f(G)$的缺点，但它仍不失为研究图的性质，尤其是解决网络问题的有力工具之一.

因为$\varepsilon-\nu+1$个基本圈是$\mathscr{C}(G)$的一个基底，故有

$$r(C_f)=r(C(G))=\varepsilon-\nu+1.$$

由于B的行属于$\mathscr{S}(G)$，而$\mathscr{S}(G)$与$\mathscr{C}(G)$有正交性，故

$$B\cdot C^T=C\cdot B^T=0\ (0\text{阵}).$$

若把边的号码调整成余树的边从1号到$\varepsilon-\nu+1$号，且把含第i边的基圈记成C_i，则图G的基本圈矩阵为

$$C_f(G)=[I\ \vdots\ C_{f_{12}}],$$

其中I是$\varepsilon-\nu+1$阶单位矩阵，$C_{f_{12}}$的列对应着生成树的边.

定理 10　若G是连通图，关于生成树T，

$$C_f=[I\ \vdots\ C_{f_{12}}],\quad B_f=[B_{11}\ \vdots\ B_{12}],$$

其中$C_{f_{12}}$与B_{12}的列对应着T的边，则

$$C_f=[I\ \vdots\ B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1}].$$

证 由$\mathscr{C}(G)$与$\mathscr{S}(G)$中向量的正交性得

$$0 = C_f B_f^T = [I \vdots C_{f_{12}}] \begin{bmatrix} B_{11}^T \\ \cdots \\ B_{12}^T \end{bmatrix} = B_{11}^T + C_{f_{12}} B_{12}^T,$$

所以有

$$B_{11}^T = C_{f_{12}} B_{12}^T.$$

又 B_{12} 的列对应生成树 T 的边，由定理9，$|B_{12}^T| \neq 0$，于是 $(B_{12}^T)^{-1}$ 存在，故得

$$C_{f_{12}} = B_{11}^T (B_{12}^T)^{-1},$$

$$C_f(G) = [I \vdots B_{11}^T (B_{12}^T)^{-1}].$$

证毕.

定理10给出由基本关联矩阵求基本圈矩阵乃至$\mathscr{C}(G)$中一切向量的一种计算方法。这种现象是可以理解的，因为由基本关联矩阵 $B_f(G)$ 可以求得关联阵 $B(G)$，就能把相应的图画出来。可见，已知基本关联矩阵，就是已知一个图，自然可以求得这个图的基本圈矩阵.

13.5 割集矩阵

本节只谈连通图.

定义 8 **$\mathscr{S}(G)$中的全体割集向量为行构成的矩阵为连通图G的割集矩阵，记成 $S(G)$；全体基本割集向量为行组成的矩阵为基本割集矩阵，记成 $S_f(G)$.**

例如图13.7，$e=6$，$v=4$，则基本割集有三个. 对于$\{e_4, e_5, e_6\}$导出的生成树，基本割集为

$$S_1 = \{e_1, e_3, e_4\},\ S_2 = \{e_1, e_2, e_6\},\ S_3 = \{e_2, e_3, e_5\}.$$

基本割集矩阵为

$$S_f(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

割集除S_1，S_2，S_3外，还有：

$$S_4=\{e_4,e_5,e_6\},\quad S_5=\{e_2,e_3,e_4,e_6\},$$

$$S_6=\{e_1,e_3,e_5,e_6\},\quad S_7=\{e_1,e_2,e_4,e_5\}.$$

割集矩阵为

$$S(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1&1\\1&1&0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

对于割集矩阵与基本割集矩阵，显然有

$$r(S(G))=r(S_f(G))=\nu-1,$$

$$C(G)(S(G))^T=S(G)\cdot(C(G))^T=0,$$

$$C_f(G)\cdot(S_f(G))^T=S_f(G)\cdot(C_f(G))^T=0.$$

定理 11　设G是连通图，关于生成树T，基本圈阵为

$$C_f=[I\ \vdots\ C_{f_{12}}],$$

基本割集矩阵为

$$S_f=[S_{f_{11}}\ \vdots\ I],$$

其中$C_{f_{12}}$的列对应T的边，$S_{f_{11}}$的列对应余树边，则

$$S_{f_{11}}=C_{f_{12}}^T.$$

证　$$0=S_f\cdot(C_f)^T=[S_{f_{11}}\ \vdots\ I]\begin{bmatrix}I\\ \cdots\\ C_{f_{12}}^T\end{bmatrix}=S_{f_{11}}+C_{f_{12}}^T,$$

我们在F_2中计算，故有

$$S_{f_{11}}=C_{f_{12}}^T.$$

证毕。

定理11告知，可以由基本圈矩阵求得基本割集矩阵，从而可以由基本关联矩阵求得基本割集矩阵。

13.6 邻接矩阵和道路矩阵

本节的计算在实数域中进行。

定义 9 称矩阵 $A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ 是标志图 G 的邻接矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_iv_j\in E(G),\\ 0, & v_iv_j\notin E(G).\end{cases}$$

例如 K_ν 的邻接矩阵是 $(1)_{\nu\times\nu}-I$，其中 $(1)_{\nu\times\nu}$ 是每个元素皆为 1 的 ν 阶方阵，I 是 ν 阶单位阵；一般地，G 的邻接阵 $A(G)$ 是主对角线上皆为 0 的对称 0-1 方阵。每一行的和是该行对应的顶之次数。

和关联矩阵一样，$A(G)$ 中含有图 G 的一切性质，我们可以根据 $A(G)$ 把图 G 画出；所以，原则上，欲研究图 G，只需研究其邻接矩阵 $A(G)$。

定理 12 设 $A(G)$ 是 G 的邻接矩阵，G 中从 v_i 到 v_j 长为 k 的道路的条数为 A^k 中 i，j 号元素。

证 对 k 进行归纳证明。$k=1$ 时，$A^k=A$，由 A 之定义，定理 12 的结论为真。假设 $k\leqslant n$ 时，定理 12 已真，要证 $k=n+1$ 时定理 12 仍真。

令 a_{ij} 是 A 的 i，j 号元素，$a_{ij}^{(n)}$ 是 A^n 的 i，j 号元素，则 A^{n+1} 的 i，j 号元素为

$$a_{ij}^{(n+1)}=a_{i1}^{(n)}a_{1j}+a_{i2}^{(n)}a_{2j}+\cdots+a_{i\nu}^{(n)}a_{\nu j}.$$

而从 v_i 到 v_j 长 $n+1$ 的道路无非是从 v_i 经 n 步到某顶 v_k，$1\leqslant k\leqslant\nu$，再由 v_k 走一步到 v_j。由归纳法假设，从 v_i 到 v_k 长 n 的道路共计 $a_{ik}^{(n)}$ 条，由 v_k 到 v_j 长 1 的道路 a_{kj} 条，所以长 $n+1$ 的道路 $v_i\cdots v_kv_j$ 共有 $a_{ik}^{(n)}a_{kj}$ 条，令 $k=1,2,\cdots,\nu$，于是长 $n+1$ 的从 v_i 中经 v_k(共 ν 个中转顶 v_k)到达 v_j 的道路共计 $\sum\limits_{k=1}^{\nu}a_{ik}^{(n)}a_{kj}$，

这正是 $A^{(m+1)}$ 中第 i，j 号元素。**证毕。**

注意，定理 12 中的道路未必是轨道。

例 4 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，求 $A^k=?$ $k\in N$。

解 考虑 $V=\{v_1, v_2\}$ 的连通图 K_2，则 A 恰为 K_2 的邻接矩阵，当 k 为奇数时，从 v_1 到 v_1 的长 k 的道路及从 v_2 到 v_2 的长 k 的道路不存在；而从 v_1 到 v_2 的长 k 的道路恰有 1 条，故由定理12，

$$A^k=A \text{（}k\text{ 为奇数）}.$$

当 k 为偶数时，从 v_1 到 v_2 的长 k 的道路不存在，从 v_1 到 v_1，从 v_2 到 v_2 长 k 的道路恰一条，故由定理 12 得

$$A^k=I \text{（}k\text{ 为偶数）}$$

其中 I 是 2 阶单位阵。

例 5 我方两名军事人员与敌方两名军事人员同到某现场视察，途中要经过一条河，现只有一只小船，每次最多能乘二人，为安全起见，敌我双方同时在场时，我方人员不能少于敌方人员，船过一次河要 10 分钟，问最短几分钟能使双方人员都渡过河去？

解 用 (m, n, l) 表示左岸有我 m 人，敌 n 人；(m, n, r) 表示右岸有我 m 人，敌 n 人。从左岸到右岸去，全部可能的状态为 $v_1=(2,2,l)$，$v_2=(2,1,l)$，$v_3=(1,1,l)$，$v_4=(2,0,l)$，$v_5=(0,2,l)$，$v_6=(0,1,l)$；$v_7=(2,2,r)$，$v_8=(2,1,r)$，$v_9=(1,1,r)$，

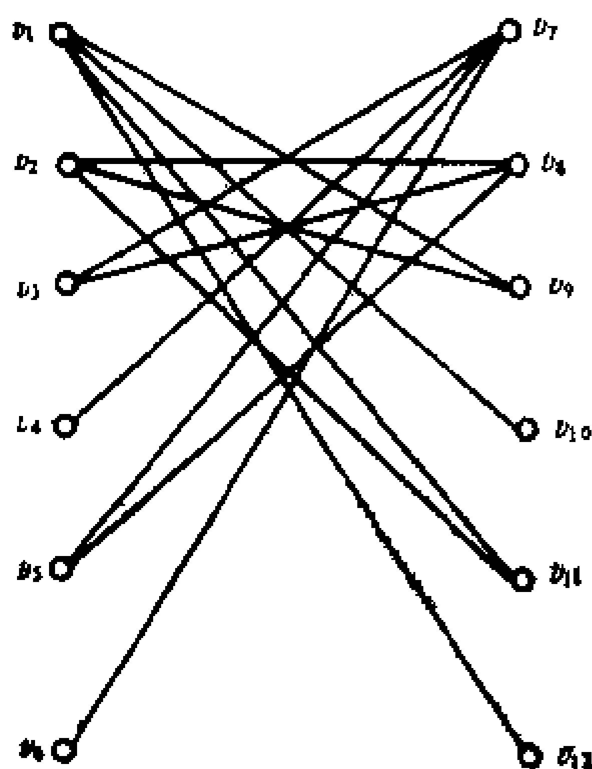


图 13.9

$v_{10}(2,0,r)$, $v_{11}=(0,2,r)$, $v_{12}=(0,1,r)$.

渡河可视为状态转移。我们以 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{12}\}$ 为顶集合，可以互相转移的两种状态之间连一条边，得到一个二分图（图13.9）。图 13.9 的邻接矩阵为

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & \bar{A} \\ \bar{A} & 0 \end{bmatrix}_{12\times 12},$$

其中

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

显然有

$$A^k=\begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{A}^k & 0 \\ 0 & \bar{A}^k \end{bmatrix}, & k\text{ 为偶数;} \\ \begin{bmatrix} 0 & \bar{A}^k \\ \bar{A}^k & 0 \end{bmatrix}, & k\text{ 为奇数.} \end{cases}$$

用 a_{ij} 记 A 中元素，$a_{ij}^{(k)}$ 记 A^k 中 i,j 号元素，我们的目标是求使 $a_{17}^{(k)}\neq 0$ 的最小自然数 k。经计算，$a_{17}^{(1)}=a_{17}^{(3)}=0$，$a_{17}^{(5)}=4$，即小船至少五次过河才能把 4 人全运到右岸，共需 50 分钟。

由 $a_{17}^{(5)}=4$，说明有四种不同的过河方案。

下面用邻接矩阵及$1+1=1$的**逻辑运算**引入道路矩阵的概念。

定义 10　图 G 的通路矩阵是指

$$P(G)=\bigvee_{k=1}^{\nu} A^{(k)}(G),$$

其中 $\bigvee_{i=1}^{\nu}$ 是逻辑和，$A^{(k)}$ 是 A^k 的逻辑 k 次方，运算中加法按 $1+1$

=1进行，$A(G)$ 是G的邻接矩阵。

如果只是定性地关心顶v_i与v_j之间有无道路，而对v_i与v_j之间道路的数目及长度不感兴趣时，道路矩阵$P(G)$可以回答我们所关心的问题，$P(G)$中i,j号元素为1，当且仅当v_i与v_j之间有道路。G是连通图的充要条件是$P(G)$中的元素皆为1。

13.7 开关网络

开关网络是计算机设计与通讯系统等方面的重要课题。我们只讨论简单接触网络。

一个开关电路可以抽象成一个无向加权图，例如图13.10是实际的开关电路，图13.11是相应的无向加权图。其中权

$$x_i=\begin{cases}1, & 开关 x_i 接通; \\ 0, & 开关 x_i 断开.\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,5.$$

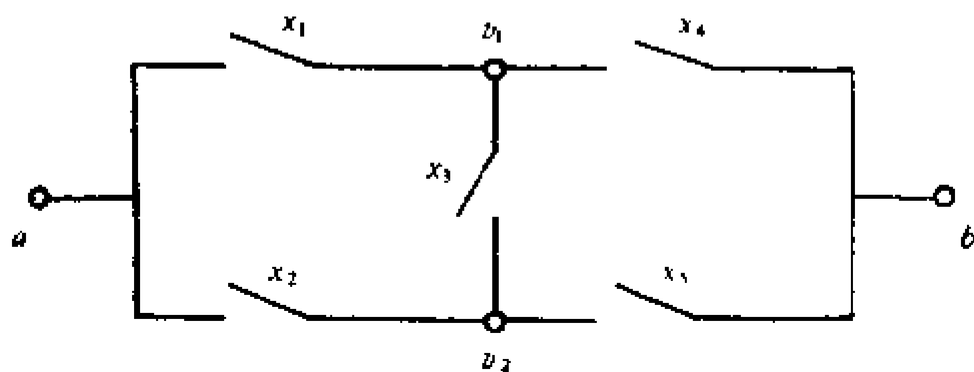


图 13.10

定义 11 开关网络是一个无向加权图G，边的权为$w(e_i)=x_i$，$e_i\in E(G)$，$i=1,2,\cdots,e$，$x_i\in\{0,1\}$，把开关网络记成$N(G,x_i)$；若$a,b\in V(G)$，a,b之间共有n条不同的轨$P_{ab}^{(k)}$，$k=1,2,\cdots,n$，令

$$f_{ab}=\sum_{k=1}^{n}\Pi_{ab}^{(k)},$$

其中$\Pi_{ab}^{(k)}$是轨$P_{ab}^{(k)}$的边权之积，这里的加法按1+1=1执行，

则称 f_{ab} 为关于 a 与 b 的开关函数．当$N(G,x_i)$中各边之权x_i皆独立变量时．$N(G,x_i)$ 叫做简单接触网络．

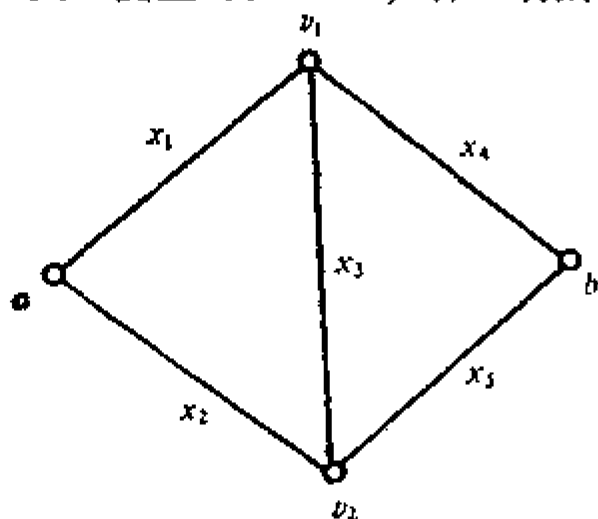


图 13.11

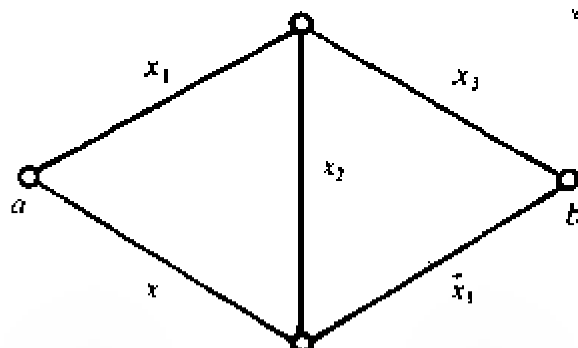


图 13.12

例如图 13.11 中的网络就是简单开关网络，它的开关函数

$$f_{ab}=x_1x_4+x_1x_3x_5+x_2x_5+x_2x_3x_4.$$

而图 13.12 中的网络不是简单接触网络，它的开关函数为

$$\begin{aligned}f_{ab}&=x_1x_3+x_1x_2\bar{x}_1+x_3\bar{x}_1+x_3x_2x_3\\&=x_1x_3+x_3x_1+x_2x_3=x_3(x_1+\bar{x}_1+x_2)=x_3.\end{aligned}$$

$f_{ab}=x_3$ 表明只要把 x_3 这个开关接通，a 与 b 则接通，只要把 x_3 这个开关断开，a 与 b 则断开，电路中 x_1 与 x_2 的开关是无效的，可以折除，以免浪费。

下面（图 13.13）是一个常用的非简单开关网络．它的开关函数为

$$f_{ab}=x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2,$$

函数表为

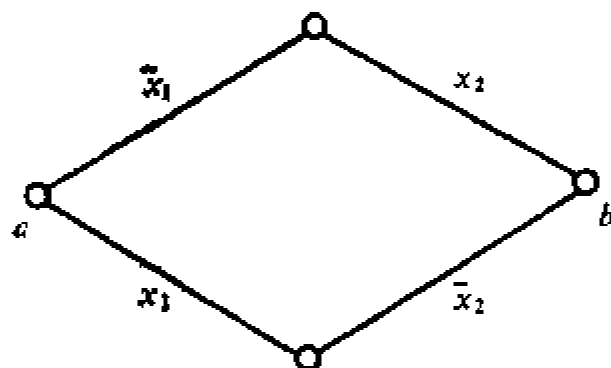


图 11.13

x_1	x_2	f_{ab}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

由此表可以看出，只变化 x_1 与 x_2 其中之一，则会引起 f_{ab} 的变化，由此可以设计出一个电灯开关电路，楼上楼下各设一开关，使得楼上与楼下都可以随意开关同一盏电灯，见图 13.14.

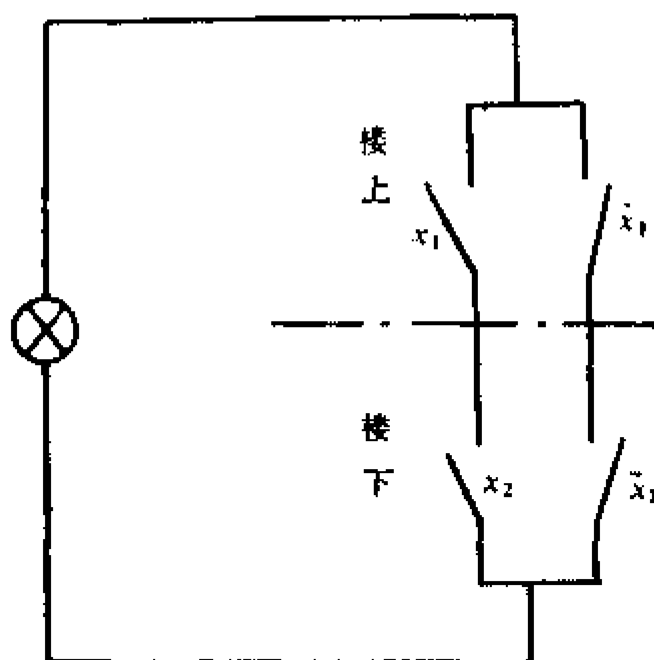


图 13.14

我们只关心 a 与 b 是否接通，所以采用逻辑运算.

$$f_{ab}=\sum_{k=1}^{m}\Pi_{ab}^{(k)}=\begin{cases}1\Longleftrightarrow\exists k=k_0,\ \text{使}P_{ab}^{(k_0)}\text{边权皆 }1\Longleftrightarrow P_{ab}^{(k_0)}\text{接通;}\\0\Longleftrightarrow a\text{ 与 }b\text{ 断开.}\end{cases}$$

f_{ab} 的值叫做 a,b 间的**传输**.f_{ab} 的表达式表现了 a 与 b 接通的所有方式. 我们的中心问题是，设计满足给定开关函数 f_{ab} 的简单开关网络. 但是，如果只要求满足开关函数，开关网络的设计是不成问题的，例如已知开关函数为

$$f_{ab}=x_1x_4+x_1x_3x_5+x_2x_5+x_2x_3x_4,$$

可以取相应的开关电路如图 13.15 所示；其实图 13.11 亦满足这个开关函数,而且用的开关比图 13.15 中的少；事实上，图 13.15 不是简单开关络网，有些边上的权是相同的，而非独立的；在节省开关个数的意义下，简单开关网络是最优的.

为解决简单开关网络的设计，我们首先建立两个引理.

引理 1 设$G=\bigcup_{i=1}^{m}P_{ab}^{(i)}$，$P_{ab}^{(i)}$是以$a$，$b$为起讫点的轨，$e_0=ab\notin E(G)$，对$G$中不含$e_0$的圈$C$，存在两条轨$P'_{ab}$与$P''_{ab}$，使得

$$E(C)=E(P'_{ab})\oplus E(P''_{ab})。$$

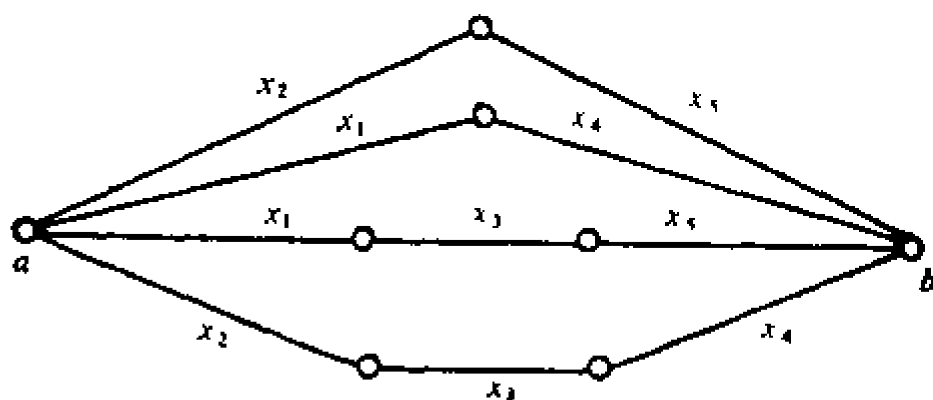


图 13.15

证（1） 若a，b在C上，则引理1自然成立，这时取圈C被a，b分隔的两个弧分别为P'_{ab}与P''_{ab}。

（2） a与b只一个顶在C上，不妨设a在C上。设$P(b,u)$是G上一条轨，u在C上，但$u\neq a$，这种轨，由于G的构造特点，一定存在，不妨设$P(b,u)$是这种轨中的最短者（图13.16）。

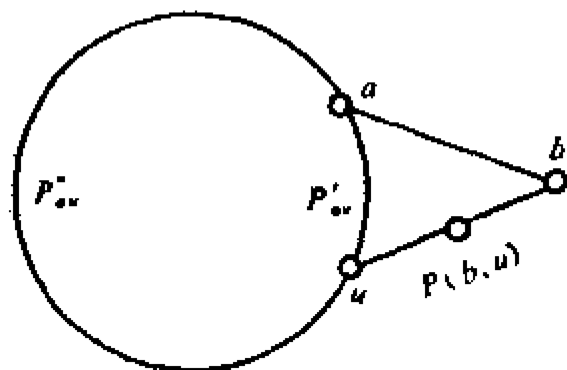


图 13.16

a与u把C分成两条轨$P'(a,u)$与$P''(a,u)$，取

$P'_{ab}=P(b,u)\cup P'(a,u)$，

$P''_{ab}=P(b,u)\cup P''(a,u)$，

则

$$E(C)=E(P'_{ab})\oplus E(P''_{ab})。$$

（3） a与b皆不在C上。因$G=\bigcup_{i=1}^{m}P_{ab}^{(i)}$，所以对于$C$上的边$e$，存在一条轨$P_{ab}^{(k)}$，$1\leqslant k\leqslant m$，使得$e$在$P_{ab}^{(k)}$上。令

$P_{ab}^{(k)}$与C的第一个公共顶为v，最末一个公共顶为w；$P_{ab}^{(k)}$上从a到v的一段记成$P_{av}^{(k)}$，$P_{ab}^{(k)}$上从w到b的一段记成$P_{wb}^{(k)}$，C被v，w划分成两条轨分别为P'_{vw}与P''_{vw}（图 13.17）。令

$$P'_{ab}=P_{av}^{(k)}\cup P'_{vw}\cup P_{wb}^{(k)},$$

$$P''_{ab}=P_{av}^{(k)}\cup P''_{vw}\cup P_{wb}^{(k)},$$

则

$$E(C)=E(P'_{ab})\oplus E(P''_{ab})$$

证毕.

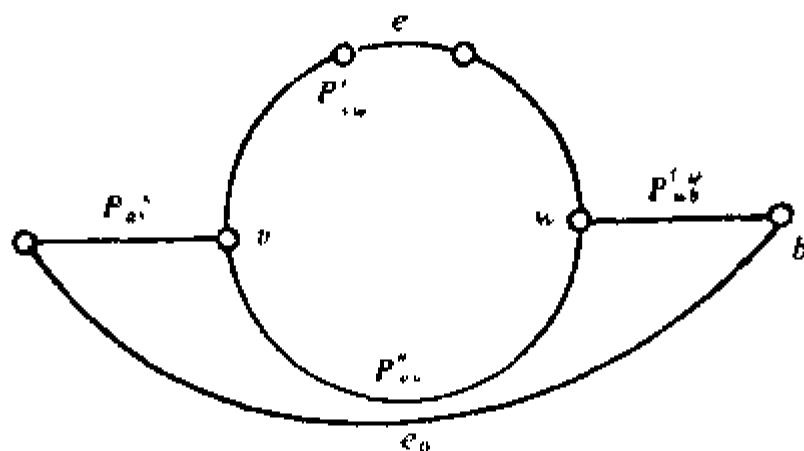


图 13.17

引理 2 **G是连通图，且**

$$\overline{C}=[I\ \vdots\ *]$$

是由$\mathscr{C}(G)$的向量为行构成的$\varepsilon-\nu+1$行，ε列的矩阵，则存在G的一个生成树，相应的基本圈矩阵满足

$$\overline{C}=C_f(G),$$

且$\overline{C}$中的单位阵I的列对应的边是余树边.

证 因e_1只含在$\overline{C}$的第一行所对应的无公共边的圈之并中，故$G-e_1$仍连通，同理

$$G-\{e_1,e_2,\cdots,e_{\varepsilon-\nu+1}\}=G_0$$

也是连通图．但

$$|E(G_0)|=\varepsilon-(\varepsilon-\nu+1)=\nu-1,$$

故G_0是G的生成树，$e_1,e_2,\cdots,e_{\varepsilon-\nu+1}$是余树边．下证

$$\overline{C}=C_f(G).$$

事实上，$\overline{C}$显然是$\mathscr{C}(G)$的一个基底，对于生成树G_0，构作基本圈矩阵，$C_f(G)$，得

$$C_f(G) = [\,I \;\vdots\; \cdot\,],$$

$C_f(G)$ 的行可由$\bar{C}$的行线性表出，由$\bar{C}$的构造特点，必有 $C_f(G)$ 的各行与$\bar{C}$的对应行相等，即 $C_f = \bar{C}$。**证毕。**

下面应用上述引理 1 与引理 2，举例说明如何由已知的开关函数绘制相应的简单开关网络。

例 6 已知 $f_{ab} = x_1x_2x_3x_5x_7 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_5x_6x_8$

$$+ x_2x_4 + x_2x_3x_5x_8 + x_3x_4x_6x_7x_8 + x_5x_6x_7.$$

试绘出相应的简单开关网络图。

解 此网络中共 8 条边。

（1）写出 f_{ab} 中各项对应的向量为行组成的矩阵，因为每一项代表从 a 到 b 的一条轨，我们称下面的矩阵为开关函数 f_{ab} 相应的轨矩阵。

$$P_{ab} = \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

（2）令 $x_0 = ab$，写出 $G + x_0$ 中含 x_0 的圈的矩阵 C_{11}

$$C_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

（3）通过 C_1 的行与列的初等变换求出（在 F_2 中）$C_f(G+x_0)$。经行的初等变换及调换列的次序，得

$$\bar{C}_1=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

我们按 $x_1,x_4,x_8,x_6,x_2,x_3,x_5,x_7,x_0$ 把 $G+x_0$ 的边排序，由引理1，$G+x_0$ 的基本圈向量可由 C_1 的行线性表出；而 $\bar{C}_1$ 是由 C_1 的行初等变换而得，故 C_1 的每一行可由 $\bar{C}_1$ 的前四行线性表出，进而知用 $\bar{C}_1$ 的前四行可以线性表出 $G+x_0$ 的每一基圈向量，又 $\bar{C}_1$ 的前四行线性无关，可见 $\bar{C}_1$ 的前四行是 $\mathscr{C}(G+x_0)$ 的基底阵，故知 $G+x_0$ 有9条边，$4=\varepsilon-\nu+1=9-\nu+1$，可知 $\nu=6$。由引理2，*存在一个 $G+x_0$ 的生成树 T，使得关于 T 的*基本圈矩阵 $C_f(G+x_0)$ 就是 $\bar{C}_1$ 中前四行组成的矩阵。且 x_1，x_4,x_8,x_6 是 $G+x_0$ 余树边。

（4）由 $C_f(G+x_0)$ 求出 $S_f(G+x_0)$。用定理11得

$$S_f(G+x_0)=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

（5）由 $S_f(G+x_0)$ 求出 $B(G+x_0)$。因为 $B_f(G+x_0)$ 的行可由 $S_f(G+x_0)$ 的行线性表出，我们对 $S_f(G+x_0)$ 进行的初等变换，得到了每列最多两个1的矩阵，即得到了图 $G+x_0$

的基本关联矩阵 $B_f(G+x_0)$：

$$B_f(G+x_0)=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

（6）把 $B_f(G+x_0)$ 的各列相加（在 F_2 中）得 $B(G+x_0)$：

$$B(G+x_0)=\begin{array}{c} \begin{matrix} & x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ b \\ v_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

（7）根据 $B(G+x_0)$ 绘制开关网络图如图 13.18。

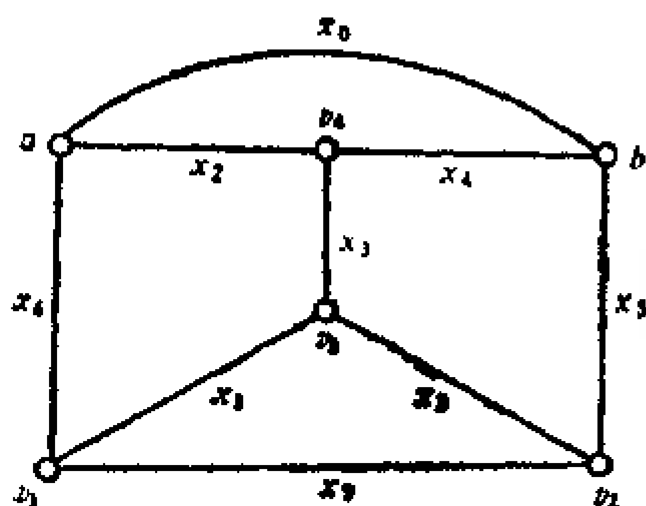


图 13.18

在图 13.18 中，删去 x_0 这一边即得简单开关网络，它满足开关函数 f_{ab}。

在对图进行构造性的综合研究的同时，引入向量表示与空间化矩阵化的定量研究，是图论学科的一个进步；在计算机上处理图论问题，强烈地刺激着图论在这一方向上的发展。为此，首先在 0-1 二元域上定义了两个线性空间：圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 和断集空间 $\mathscr{S}(G)$。

对于选定的生成树 T，基本圈向量构成的矩阵 $C_f(G)$ 是空

间$\mathscr{C}(G)$的一个基底矩阵，所以有了生成树T，原则上，就等于把圈空间的情况搞清楚了，基本割集向量构成的矩阵$S_f(G)$是$\mathscr{S}(G)$空间的一个基底矩阵，所以，有了生成树T，原则上，就等于把断集空间的情况搞清楚了。而生成树的不同选择，$C_f(G)$与$S_f(G)$往往会相应地变动，生成树好似是空间$\mathscr{C}(G)$与$S_f(G)$的标架。

在应用中，$C_f(G)$与$S_f(G)$起很重要的作用，例如在开关网络的设计中，C_f与S_f起了关键作用。

在无向图的矩阵中，关联矩阵$B(G)$对图作了完整刻划，它与图是一一对应的，可以互相确定，而且基本关联矩阵$B_f(G)$又是$\mathscr{S}(G)$的一个基底矩阵。$B_f(G)$中含有图G的一切信息，由$B_f(G)$可以把$B(G)$，$S_f(G)$，$C_f(G)$确定出来便是可以理解的了。

从另一个角度完整刻划图的矩阵是邻接矩阵$A(G)$，它与图保持有一一对应关系，可以互相确定。$A(G)$中也含有图G的一切信息，例如可以构作道路矩阵，从而判别G是否连通，任意两顶间有多长的道路，有几条，等等。

本章学后应知应会的问题有：

（1）空间$\mathscr{E}(G)$，$\mathscr{C}(G)$，$\mathscr{S}(G)$的定义、基底和维数及向量个数。

（2）关联阵$B(G)$与基本关联阵$B_f(G)$的定义及秩，

（3）$B(G)$和$B_f(G)$与图的连通性的关系及生成树的确定。

（4）圈矩阵$C(G)$，基圈阵$C_f(G)$，割集矩阵$S(G)$，基本割集矩阵$S_f(G)$的定义，秩以及$B_f(G)$，$C_f(G)$，$S_f(G)$之间的关系。

（5）邻接矩阵$A(G)$与道路矩阵$P(G)$的定义，$A^k(G)$的图论含义。

（6）简单开关网络与开关函数f_{ab}的定义，如何由f_{ab}求

相应的简单开关网络？

习　　题

1. 求图13.19中图G的圈空间$\mathscr{C}(G)$的全体向量，并求出$\mathscr{C}(G)$的一个基底，给出相应的图示。

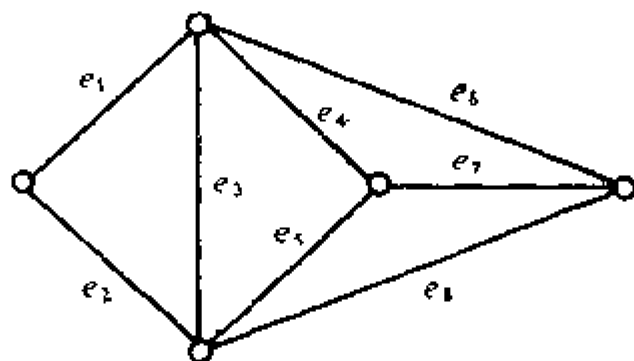


图 13.19

2. 求图13.19中图G的断集空间$\mathscr{S}(G)$中的全体向量，并求出$\mathscr{S}(G)$的一个基底，给出相应的图示。

3. G为Euler图的充要条件是对任何$S\in\mathscr{S}(G)$，S中非0分量有偶数个。

4 邻接阵$A(G)$的每列之和与关联矩阵的每行之和有什么图论含义？

5. G是二分图，证明G的顶可以适当编号，使得$A(G)$呈如下形状

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

其中$A_{21}=A_{12}^T$。

6. 已知

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求A^{1001}中的2,2号元素。

7. 求K_4中任一顶到自己的长3的道路数目，且在图上标

出这些道路。

8. 已知图G的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

不许画图，论证G是否连通。

9. 已知图G的基本圈矩阵为

$$C_f(G)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0&1&1&1\end{bmatrix},$$

求G的一个基本割集矩阵$S_f(G)$。

10. 已知图G的基本关联阵为

$$B_f(G)=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix},$$

求$C_f(G)$与$S_f(G)$。

11. 已知连通图G的基本圈阵为

$$C_f(G)=\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d&e&f&g\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array},$$

不许画图，回答是否：

(1) $\{b, c, e, f\}$导出生成树。

(2) $\{a, c, e, f\}$导出生成树。

(3) $\{a, b, e, g\}$是割集。

(4) $\{b, f, c\}$是割集。

（5）$\{d, e, f, g\}$是割集.

（6）$\{a, b, c, d, g\}$导出一个圈.

（7）$\{a, c, d, e, g, f\}$导出一个圈.

12. 画出图 13.20 中的每棵生成树:

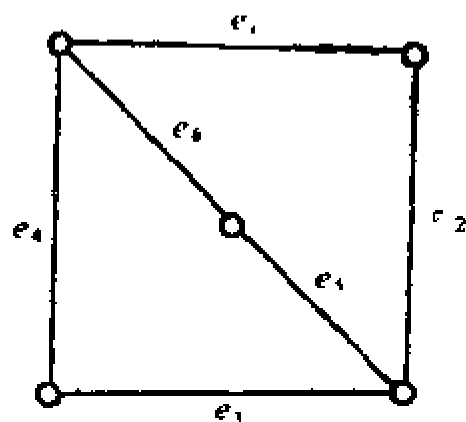


图 13.20

13. 已知开关函数$f_{a,b}$，画出相应的简单开关网络:

（1）$f_{a,b}=x_1x_3+x_1x_2x_5+x_2x_3x_4+x_4x_5$.

（2）$f_{a,b}=x_1x_2x_5+x_1x_4x_8+x_2x_3x_6+x_3x_4x_7$

$+x_1x_2x_6x_7x_8+x_1x_4x_5x_6x_7+x_2x_3x_5x_7x_8$

$+x_3x_4x_5x_6x_8$.

14. $A(G)$ 是图G的邻接矩阵,

（1）A^2 主对角线之和为100, 求$|E(G)|=?$

（2）A^3 主对角线之和为600, 求G中三角形个数.

15. 已知 n阶矩阵A的左下角及主对角线右邻

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的元素为1，其余元素皆为0，k为自然数，试用图论方法求:

（1）A^2 主对角线元素之和.

（2）A^3主对角线元素之和。

16．K_8中存在6个圈C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6，使得
$E(K_8)=E(G)\oplus E(C_2)\oplus E(C_3)\oplus E(C_4)\oplus E(C_5)\oplus E(C_6)$。

17．V_0是图G的独立集，求邻接矩阵$A(G[V_0])$和道路矩阵$P(G[V_0])$。

18．图G的每个基本圈向量中，非零分量的个数皆为偶数，求$\sum_{i=1}^{\infty}A^{2i-1}$主对角线之和，其中$A$是$G$的邻接矩阵。

19．T_1,T_2是图G的两个生成树，相应的基圈阵分别为$C_f^{(1)}$与$C_f^{(2)}$，求证$C_f^{(2)}$可以由$C_f^{(1)}$通过初等行变换而得。

20．$A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$是图$G$的邻接矩阵，

（1）对任一自然数k，A^{2k-1}主对角线元素之和为零，$|E(G)|\neq 0$，求$\chi'(G)$。

（2）对任一自然数k，A^{2k-1}主对角线元素之和为零，$|E(G)|\neq 0$，求$\chi(G)$。

21．G的基本关联矩阵为

$$B_f=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix},$$

不许画图，回答：

（1）G是否连通图？为什么？

（2）G是否Euler图？为什么？

（3）G是否可以“一笔画”？为什么？

（4）G是否平面图？为什么？

（5）$\mathscr{C}(G)$是几维线性空间？

（6）G中共有几个圈？为什么？

（7）G是否Hamilton图？为什么？

（8）$\tau(G)=$？

14 有向图中的矩阵

14.1 邻接矩阵与道路矩阵

本章讨论无环与平行边的有向图.

定义 1 G**是标志的有向图，称矩阵** $A(G)=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$ **为** G **的邻接矩阵，其中**

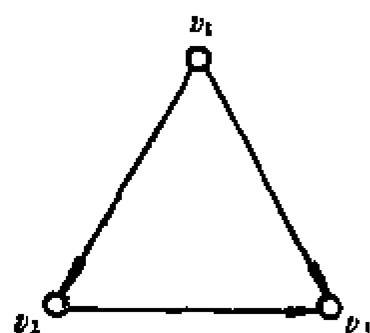


图 14.1

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_iv_j\in E(G),\\ 0, & v_iv_j\overline{\in}E(G).\end{cases}$$

例如图 14.1 中图 G 的邻接矩阵为

$$A(G)=\begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0\end{matrix}.$$

定理 1 **有向图** G **中长** k **的有向道路** $W(v_i,v_j)$ **的条数等于** $A^k(G)$**中** i,j **号元素.**

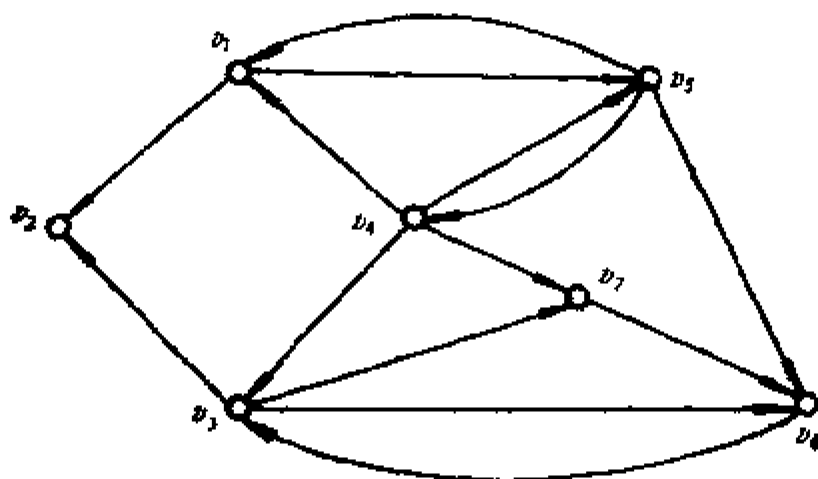


图14.2

证明与第13章定理12相同，有向道路未必是有向轨。

例 1 图 14.2 是 7 个城市间的道路网络，问由 v_1 到 v_7 有无道路相通？若有，至少多长？（两城之间的边长为 1 。）

解 图 14.2 中有向图的邻接矩阵为

$$A(G)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

从 $A(G)$ 中知 $a_{17}=0$，即从 v_1 到 v_7 无长 1 的道路，从 v_1 到 v_7 去要“绕行”。

$$A^2(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&2&0&1&1&3&1\\1&1&2&0&2&0&1\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

A^2 中的 1,7 号元素为 0，说明从 v_1 到 v_7 无长 2 的道路。

$$A^3(G)=\begin{pmatrix}1&1&2&0&2&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1\\2&1&4&1&2&2&1\\2&3&0&2&1&5&2\\0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$A^3(G)$中的1，7号元素为1，说明从v_1到v_7只有1条长3的道路，这是一条从v_1到v_7的最短路，它是$v_1v_5v_4v_7$。

定义 2 **设$A(G)$是有向图G的邻接矩阵，则称矩阵**

$$P(G)=\bigvee_{k=1}^{\nu}A^{(k)}(G)$$

为有向图G的道路矩阵，其中$\bigvee_{k=1}^{\nu}$是逻辑和，$A^{(k)}$是$A(G)$的逻辑k次方。

显然，有向图G是强连通图的充要条件是通路矩阵$P(G)$中的元素皆为1。

定理 2 **若$P(G)$是有向图G的道路矩阵，令**

$$P(G)\odot P^T(G)=\begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}p_{21} & \cdots\cdots & p_{1\nu}p_{\nu1} \\ p_{21}p_{12} & p_{22}^2 & \cdots\cdots & p_{2\nu}p_{\nu2} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ p_{\nu1}p_{1\nu} & p_{\nu2}p_{2\nu} & \cdots\cdots & p_{\nu\nu}^2 \end{bmatrix},$$

其中p_{ij}是$P(G)$的元素；设$P(G)\odot P^T(G)$中第i行的非零元素为

$$p_{ij_1}p_{j_1i},p_{ij_2}p_{j_2i},\cdots,p_{ij_k}p_{j_ki},$$

则$G[\{v_i,v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_k}\}]$是$G$的极大强连通子图。

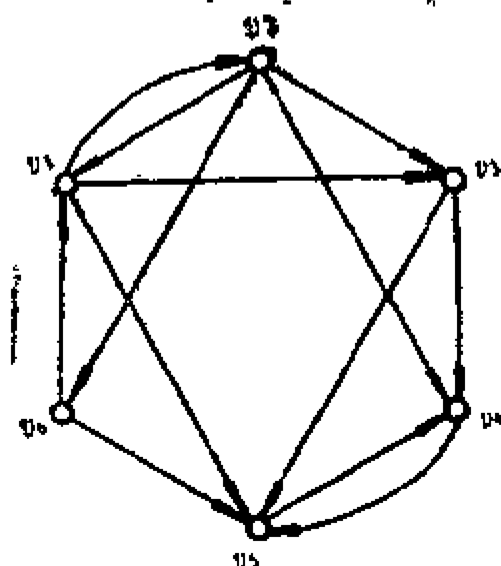


图 14.3

证 因为$p_{ij_1}p_{j_1i},\cdots,p_{ij_k}p_{j_ki}$皆非零，故$p_{ij_l}=p_{j_li}=1$，$l=1,2,\cdots,k$，于是$v_i$与$v_{j_l}$在一个有向回路上，从而$v_i$与$v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_k}$在一个有向回路$W_0$上；另一方面，若$v_j\in V(W_0)$，$i\neq j$，则$p_{ij}p_{ji}=1$，从而$v_j\in\{v_{j_l}|l=1,2,\cdots,k\}$，故$\{v_i\}\cup\{v_{j_l}|l=1,2,$

$\cdots, k\} = V(W_0)$， 所以 $G_1 = G[\{v_i, v_{l_1}, \cdots, v_{l_k}\}$ 是强连通子图。

下证 G_1 之极大性。$\forall v_m \in V(G)$，$v_m \overline{\in} V(W_0)$，若 $G[\{v_m\} \cup V(W_0)]$ 仍是强连通子图，则 v_i 与 v_m 在一个有向回路上，于是 $p_{im}p_{mi} = 1$，即 $v_m \in \{v_{l_i} | l = 1,2,\cdots,k\}$，与 $v_m \overline{\in} V(W_0)$ 矛盾。故 G_1 是极大强连通子图。**证毕。**

例 2 一群孩子，有些比较要好，有些则不大要好；而且，甲对乙有好感，乙未必对甲有好感，以孩子为顶，孩子 v_i 对孩子 v_j 有好感时，在 v_i 与 v_j 之间连一有向边 v_iv_j，如图 14.3所示，问哪些孩子经常在一起玩

解 图 14.3 中的有向图 G 之邻接矩阵为

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

由 $P(G) = \bigvee_{i=1}^{6} A^{(i)}(G)$ 得

$$P \odot P^T = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_6 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

由定理 2 知，$\{v_1, v_2, v_6\}, \{v_3\}, \{v_4, v_5\}$ 导出三个极大强连通子

图，可见 v_1, v_2, v_6 这三个孩子经常在一起玩；v_4 与 v_5 这两个孩子经常在一起玩；而 v_3 这个孩子经常一个人玩。

注意，定理 2 中说 $G[\{v_i, v_{j_1}, \cdots v_{j_k}\}]$ 是极大强连通子图，但 $G[\{v_i, v_{j_1}, \cdots, v_{j_k}\}] = G[\{v_{j_1}, \cdots, v_{j_k}\}]$，即 $v_i \in \{v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_k}\}$。事实上，当 $G[\{v_i, v_{j_1}, \cdots, v_{j_k}\}]$ 为强连通子图时，$p_{ii} = 1$，于是 $p_{ii}p_{ii} = 1$，故在 $P \bigcirc P^T$ 的第 i 行的非零元素中有一个 $p_{ij_m}p_{j_mi}$ 即为 $p_{ii}p_{ii}$，即 $v_{j_m} = v_i$，$1 \leqslant m \leqslant k$。

14.2 关联矩阵和生成树的数目

定义 3 **有向图** G **的关联矩阵是这样一个矩阵** $B(G) = (b_{ij})_{\nu \times \varepsilon}$，**其中**

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 之尾；} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 之头；} \\ 0, & e_j \text{ 的头尾皆非 } v_i\text{。} \end{cases}$$

例如图 14.1 中图的关联矩阵为

$$B(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & -1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}.$$

与无向图类似地，把 $B(G)$ 中的任一行删除，得到的子矩阵记成 $B_f(G)$，称为有向图 G 的基本关联矩阵，且有结论：

(1) G **是弱连通有向图，则** $r(B(G)) = r(B_f(G)) = \nu - 1$。

(2) 有向图 G **之底图有** ω **个连通片，则**

$$r(B(G)) = r(B_f(G)) = \nu - \omega.$$

与无向图相区别的是这里的计算在实数域中进行。

定理 3 **有向图** G **的关联矩阵** $B(G)$ **的任意子行列式取值范围是** $\{0, 1, -1\}$。

证 设 B_0 是 $B(G)$ 中第 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 行与第 $j_1, j_2, \cdots, j_m$

列的元素构成的 $m\times m$ 子方阵。

（1）若 B_0 中每列 1 与 -1 各出现恰一次，则 B_0 各行向量之和为 0，即 $|B_0|=0$。

（2）若 B_0 中有一列元素皆 0，则 $|B_0|=0$。

（3）若 B_0 中有一列只有一个非 0 元素，我们按上述这一列的代数余子式展开行列式 $|B_0|$，得 $|B_0|=\pm|B_1|$，B_1 比 B_0 的阶数少 1，若 $|B_1|=0$，则 $|B_0|=0$；若 $B_1\neq 0$，则 B_1 中有一列只一个非零元素，可继续用 $|B_1|$ 的代数余子式表示 $|B_1|$，直至到 $|B_0|=\pm 1$。**证毕。**

定理 4 $e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_{\nu-1}}$ **是** G **的生成树的边的充要条件是这** $\nu-1$ **条边在** $B_f(G)$ **中对应的列组成的行列式等于 1 或 −1，这里** G **为有向图。**

定理 4 之证明与第 13 章定理 9 相似。

下面给出求有向图 G 的生成树数目的公式，为此，引用一下线性代数中的

Binet-Cauchy **公式：**

已知 $P=(p_{ij})_{m\times n}$，$Q=(q_{ij})_{n\times m}$，**且** $m\leqslant n$，**则**

$$\det(PQ)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}\begin{vmatrix} p_{1i_1} & \cdots & p_{1i_m} \\ p_{2i_1} & \cdots & p_{2i_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{mi_1} & \cdots & p_{mi_m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} q_{i_11} & \cdots & q_{i_1m} \\ q_{i_21} & \cdots & q_{i_2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{i_m1} & \cdots & q_{i_mm}\end{vmatrix}.$$

例如 $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$，

$$PQ=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad \det(PQ)=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3\end{vmatrix}=13,$$

用 Binet-Cauchy 公式算得

$$\det(PQ)=\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=13。$$

定理 5 G**是弱连通有向图，则**G**的生成树的数目为**

$$\det(B_f(G)\cdot B_f^T(G))。$$

证 对 $B_f(G)$与B_f^T用 Binet-Cauchy 公式，再用定理4得

$$\det(B_f(G)B_f^T(G))=\tau(G)\cdot(\pm1)^2=\tau(G),$$

其中$\tau(G)$为生成树的数目。**证毕。**

例 3 求竞赛图K_ν的生成树之个数$\tau(K_\nu)$。

解 设 $B_f(K_\nu)$的元素是b_{ij}，则

$$B_f(K_\nu)B_f^T(K_\nu)=(b'_{ij})_{(\nu-1)\times(\nu-1)},$$

$$b'_{ij}=\sum_{k=1}^{\varepsilon}b_{ik}b_{jk},\quad i,j=1,2,\cdots,\nu-1。$$

当 $i=j$ 时，

$$b'_{ij}=b'_{ii}=\sum_{k=1}^{\varepsilon}(b_{ik})^2,\quad i=1,2,\cdots,\nu-1。$$

又由于K_ν是完全图，每顶与ν_{-1}条边相关联，故

$$b'_{ii}=\nu-1,\quad i=1,2,\cdots,\nu-1。$$

当 $i\neq j$ 时，$b'_{ij}=-1$，故得

$$B_f(K_\nu)B_f^T(K_\nu)=\begin{bmatrix}\nu-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\-1 & \nu-1 & -1 & \cdots & -1\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\-1 & -1 & -1 & \cdots & \nu-1\end{bmatrix}。$$

下面计算$\det(B_f(K_\nu)B_f^T(K_\nu))$。为此，考虑$\nu-1$阶方阵$T$，其元素为

$$t_{ii}=2,\quad i<\nu-1;$$
$$t_{\nu-1,\nu-1}=1;$$
$$t_{ij}=1,\quad i\neq j。$$

易知$\det T=1$。于是

$$\det(TB_f(G)B_f^{\mathrm T}(G))=\begin{vmatrix}\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \nu & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \nu & \cdots & 0 & 0\\ & & \cdots\cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu & 0\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & & 1\end{vmatrix}$$

$$=\nu^{\nu-2}.$$

而

$$\det(TB_f(G)B_f^{\mathrm T}(G))=\det T\cdot\det(B_f(G)B_f^{\mathrm T}(G))$$
$$=\det(B_f(G)B_f^{\mathrm T}(G)),$$

故

$$\tau(K_\nu)=\det(B_f(G)B_f^{\mathrm T}(G))=\nu^{\nu-2},$$

这正是 Caylay 定理的结论。

例 4 求图 14.4 中图的生成树个数$\tau(G)$。

解

$$B_f(G)=\begin{matrix} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\end{matrix}\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g\\ \end{matrix}$$

$$B_f(G)=\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

（列依次为 a, b, c, d, e, f, g）

$$B_f(G)B_f^{\mathrm T}(G)=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix},$$

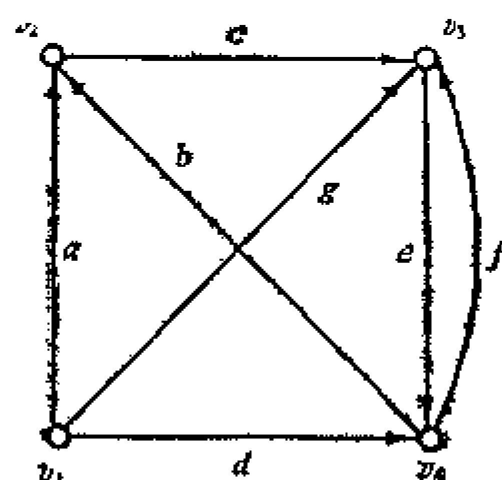


图 14.4

故得

$$\tau(G)=\det(B_f(G)^{\mathrm T}_f(G))$$

$$=\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 4\end{vmatrix}=24.$$

14.3 圈矩阵与割集矩阵

G是有向图，在其底图上，对每个无向圈 C_i，首先任意指定一个**循环方向**。

定义 4 称以 C_{ij} 为元素的矩阵 $C(G)$ 为有向图 G 的圈矩阵，其中

$$C_{ij}=\begin{cases}1, & \text{无向圈 } C_i \text{ 中含边 } e_j\text{，且 } e_j \text{ 的方向与 } C_i \text{ 的循环方向一致；}\\ -1, & \text{无向圈 } C_i \text{ 中含边 } e_j\text{，但 } e_j \text{ 的方向与 } C_i \text{ 的循环方向相反；}\\ 0, & \text{无向圈 } C_i \text{ 中不含边 } e_j\text{。}\end{cases}$$

例如图 14.5 中，其底图上有三个无向圈，已被规定了顺时针的循环方向（也可以取逆时针循环方向，但取定之后，不能改变其循环方向），于是这个有向图的圈矩阵为

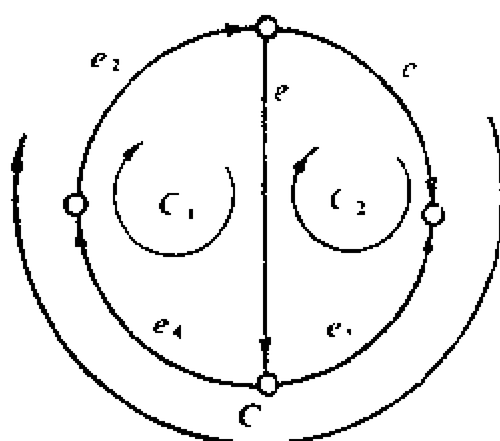


图 14.5

$$C(G)=\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ C_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C_2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ C_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{matrix}$$

定义 5 在有向图 G 中取定生成树 T，在 G 的圈矩阵中，提取只含一条余树边的圈（基本圈）对应的行构成子矩阵 $C_f(G)$，称其为有向图的基本圈矩阵。

例如图 14.5 中，取 e_1,e_4,e_5 为生成树的边，则其基本圈矩阵为

$$C_f(G)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

下面讨论有向图中的割集和基本割集矩阵。

在有向图G中，$V_1\subset V(G)$，$V_1\neq\varnothing$，$\bar{V}_1\neq\varnothing$，考虑边子集$(V_1, \bar{V}_1)\cup(\bar{V}_1, V_1)$，我们规定一个**流向**，这个流向可以任意取定与$(V_1\bar{V}_1)$中的边方向一致或与$(\bar{V}_1, V_1)$中边的方向一致，则称$(V_1, \bar{V}_1)\cup(\bar{V}_1, V_1)$连同规定的流向为$G$的一个**有向断集**。同理，把$G$的底图中的一个割集对应的在有向图$G$中的有向断集称为有向图$G$的**有向割集**，底图中的基本割集对应的有向割集称为有向图G中的**基本有向断集**。

定义 6　称$S(G)=(s_{ij})$为有向图G的割集矩阵，其中

$$s_{ij}=\begin{cases}1, & \text{有向割集 } S_i \text{ 中含边 } e_j\text{，且两者方向一致；}\\ -1, & \text{有向割集 } S_i \text{ 中含边 } e_j\text{，且两者方向相反；}\\ 0, & \text{有向割集 } S_i \text{ 中不含边 } e_j\text{。}\end{cases}$$

又提取有向图G的割集矩阵中的基本有向割集对应的行构成子矩阵$S_f(G)$，称其为**有向图G的基本割集矩阵**。

例如图14.6中，有六个有向割集，它的割集矩阵为

$$S(G)=\begin{array}{c}\\ s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\\ s_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc}-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array}.$$

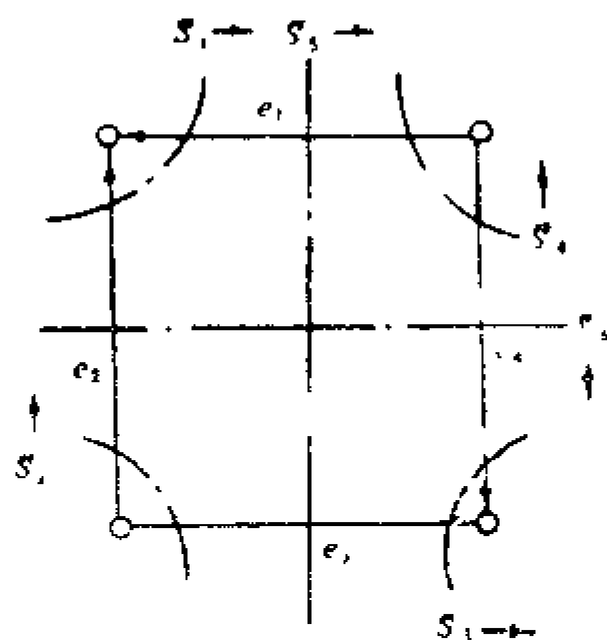


图 14.6

若取e_1, e_2, e_3为生成树的边，则有向图G的基本割集矩阵为

$$S_f(G)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

有向图中的矩阵具有无向图中相应矩阵的相似的性质：

(1) $B(G)C^T(G)=C(G)B^T(G)=0$。

(2) $r(C(G))=r(C_f(G))=\varepsilon-\nu+1$。

(3) $C(G)S^T(G)=S(G)C^T(G)=0$,

(4) $r(S(G))=r(S_f(G))=\nu-1$.

(5) G**是弱连通有向图，**T**为生成树，**

$$C_f(G)=[I \vdots C_{f12}],$$

$$B_f(G)=[B_{11} \vdots B_{12}],$$

其中C_{f12}**与**B_{12}**的列对应于树**T**之边，**I**与**B_{11}**对应于余树之边，则**

$$C_f(G)=[I \vdots -B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1}].$$

(6) **对于生成树**T**，**

$$S_f(G)=[S_{f11} \vdots I],$$

$$C_f(G)=[I \vdots C_{f12}],$$

其中$C_f(G)$**与**$S_f(G)$**中列对应的边之序号一致，且**S_{f11}**对应余树边，**C_{f12}**对应树边，则**

$$S_{f11}=-C_{f12}^T.$$

14.4 电 路 网 络

本节利用有向图的矩阵建立电路网络中的电流与电压满足的常微分方程，进而求出各支路上的电流与电压。

基尔霍夫电流定律，代号KCL。

KCL：**电网路上每个节点上各支路电流代数和为零。**

基尔霍夫电压定律，代号KVL。

KVL：**电网络上每一回路内各支路电压代数和为零。**

由于各支路电流与电压的方向往往不能事先断定，为方便起见，事先规定各支路上电流与电压的一个一致的所谓**参考方向，**于是便把一个实际电路网络抽象成一个有向图G，再把各支路电流$i(e,t)$视为边e之权，则得一个网络，把此网络记成$N(G,i(e,t))$；有时以各支路之电压$v(e,t)$为边e之权，得到的网络记成$N(G,v(e,t))$。

例如图14.7中电路相应的有向加权图 $N(G,i(e,t))$ 如图14.8所示。

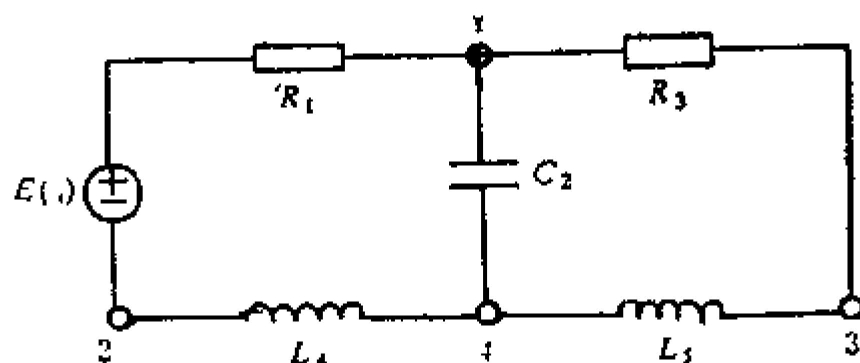


图 14.7

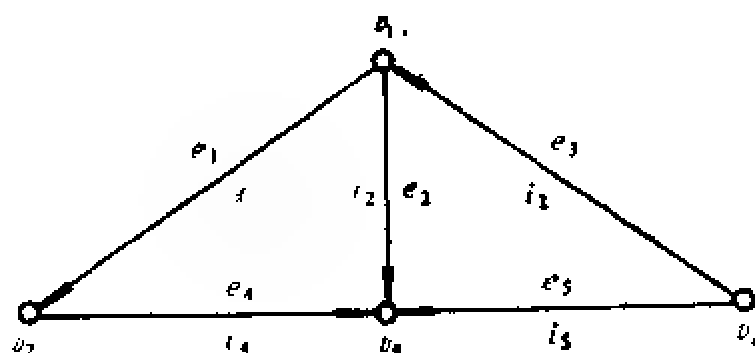


图 14.8

KCL 的图论表达式为

$$B(G)\bar{I}=\mathbf{0},$$

$$B_f(G)\bar{I}=\mathbf{0};$$

KVL 的图论表达式为

$$C(G)\bar{V}=\mathbf{0},$$

$$C_f(G)\bar{V}=\mathbf{0}.$$

其中

$$\bar{I}=\begin{bmatrix} i_1(e_1,t) \\ \vdots \\ i_b(e_b,t) \end{bmatrix},\quad \bar{V}=\begin{bmatrix} v_1(e_1,t) \\ \vdots \\ v_b(e_b,t) \end{bmatrix}.$$

例如图14.8中，

$$\text{KCL:}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{KVL:}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在KVL的表达式中，我们取循环方向为顺时针方向，C_1是$v_1v_4v_2v_1$，C_2是$v_1v_3v_4v_1$，C_3是$v_1v_5v_4v_2v_1$。

下面推导电路网络计算中状态变量法的基本关系式。

对于选定的生成树T，对边适当排序，使得

$$C_f(G)=[I \vdots C_{f_{12}}],$$

$$B_f(G)=[B_{11} \vdots B_{12}],$$

其中I与B_{11}的列对应余树边，由$B_f(G)\bar{I}=0$得

$$[B_{11} \vdots B_{12}]\begin{bmatrix} \bar{I}_c \\ \bar{I}_T \end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

其中$\bar{I}_c$是余树边上的电流列，$\bar{I}_T$是树边上的电流列，即

$$B_{11}\bar{I}_c+B_{12}\bar{I}_T=\mathbf{0}$$

$$\bar{I}_T=-B_{12}^{-1}B_{11}\bar{I}_c. \tag{1}$$

由（1）知，余树边上的电流与生成树边上的电流不全是独立的，知其一方可求得另一方。

由$C_fV=0$得

$$[I \vdots C_{f12}]\begin{bmatrix} V_c \\ V_T \end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

其中V 是余树边上的电压列，V_T是生成树边上的电流列，

所以有

$$V_e = -C_{f_{12}} V_T. \tag{2}$$

由（2）知余树边上的电压与生成树边上的电压不是独立的，知其一方可求得另一方。

又由于 $C_{f_{12}} = -B_{11}^T(B_{12}^{-1})^T$ 得

$$C_{f_{12}}^T = -B_{12}^{-1}B_{11}.$$

令
$$K = -C_{f_{12}} = B_{11}^T(B_{12}^{-1})^T,$$

则有

$$V_e = KV_T,$$

$$I_T = -K^T I_e.$$

最后得**基本关系式**

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ V_T \end{bmatrix}. \tag{3}$$

下面用例题说明如何应用公式（3）把电路问题化为常微分方程组来解。

图论中常用的字母 v 与 e 在电路中有固定的物理意义，为避免混淆，我们改用 1，2，…表示图的顶，1′，2′，…表示图的边。

例 5 建立图 14.9 中电路满足的微分方程。

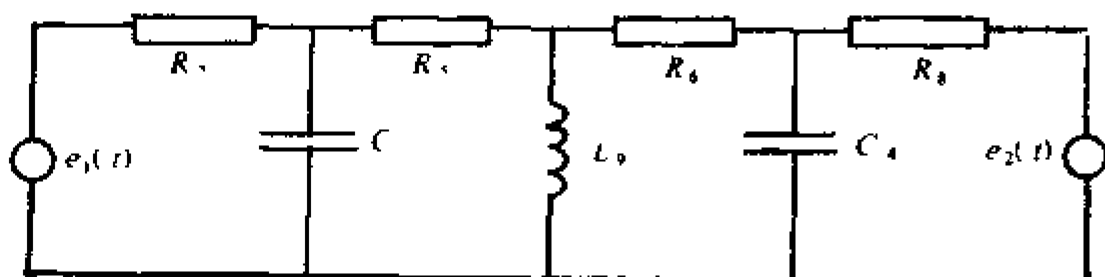


图 14.9

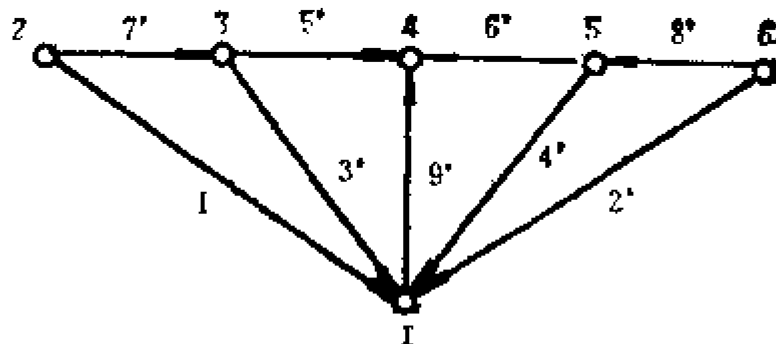


图 14.10

解 选1′,2′,3′,4′,5′为生成树的边，它们含$e_1(t)$，$e_2(t)$，c_3，c_4，R_5，即含所有的电容及电源和部分电阻(图14.10)。于是有

$$V_c=\begin{bmatrix}v_6\\v_7\\v_8\\v_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_6 i_6\\R_7 i_7\\R_8 i_8\\L_9\dfrac{\mathrm{d}i_9}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix},\quad I_c=\begin{bmatrix}i_6\\i_7\\i_8\\i_9\end{bmatrix},$$

$$V_T=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1(t)\\e_2(t)\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix},\quad I_T=\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\\i_4\\i_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\C_3\dfrac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}\\C_4\dfrac{\mathrm{d}v_4}{\mathrm{d}t}\\\dfrac{v_5}{R_5}\end{bmatrix},$$

$$B_f(G)=\begin{array}{c|ccccccccc} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9'\\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}.$$

把边重新排序，使$B_f(G)=[B_{11}\ \vdots\ B_{12}]$，其中

$$B_{11}=\begin{array}{cccc} 6' & 7' & 8' & 9'\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array},\quad B_{12}=\begin{array}{ccccc} 1' & 2' & 3' & 4' & 5'\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array},$$

$$B_{12}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0\end{bmatrix},$$

$$K=B_{11}^{T}(B_{12}^{-1})^{T}=\begin{bmatrix}0&0&-1&1&1\\1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&-1&0&1\end{bmatrix}.$$

代入公式(3)得

$$\begin{pmatrix}R_6 i_6\\R_7 i_7\\R_8 i_8\\L_9\dfrac{di_9}{dt}\\i_1\\i_2\\C_3\dfrac{dv_3}{dt}\\C_4\dfrac{dv_4}{dt}\\\dfrac{v_5}{R_5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&1&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_6\\i_7\\i_8\\i_9\\e_1(t)\\e_2(t)\\v_3\\v_4\\v_5\end{pmatrix}.$$

展开得

$$i_6=(v_4+v_5-v_3)/R_6, \qquad (4)$$

$$i_7=(e_1(t)-v_3)/R_7, \qquad (5)$$

$$i_8=(e_2(t)-v_4)/R_8, \qquad (6)$$

$$L_9\frac{di_9}{dt}=v_5-v_3, \qquad (7)$$

$$i_1 = -i_7, \tag{8}$$

$$i_2 = -i_8, \tag{9}$$

$$C_3\frac{dv_3}{dt} = i_6 + i_7 + i_9, \tag{10}$$

$$C_4\frac{dv_4}{dt} = i_8 - i_6, \tag{11}$$

$$v_5 = -R_5(i_9 + i_6). \tag{12}$$

由（4）与（12）得

$$v_5 = \frac{R_5 v_3 - R_5 R_6 i_9 - R_6 v_4}{R_5 + R_6}. \tag{13}$$

$$i_6 = \frac{R_6(v_4 - v_3) - R_5 R_6 i_9}{R_6(R_5 + R_6)} \tag{14}$$

把（13）代入（7）得

$$L_9\frac{di_9}{dt} = \frac{-R_5R_6}{R_5+R_6}i_9 - \frac{R_6}{R_5+R_6}v_3 - \frac{R_5}{R_5+R_6}v_4. \tag{15}$$

类似地由（10）与（11）得

$$C_3\frac{dv_3}{dt} = \frac{R_6}{R_5+R_6}i_9 - \left(\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_5+R_6}\right)v_3 + \frac{1}{R_5+R_6}v_4 + \frac{e_1(t)}{R_7}, \tag{16}$$

$$C_4\frac{dv_4}{dt} = \frac{R_5}{R_5+R_6}i_9 + \frac{1}{R_5+R_6}v_3 - \left(\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_5+R_6}\right)v_4 - \frac{e_2(t)}{R_8}. \tag{17}$$

把（15）、（16）、（17）写成矩阵形式为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_9 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-R_5R_6}{L_9(R_5+R_6)} & \frac{-R_6}{L_9(R_5+R_6)} & \frac{-R_5}{L_9(R_5+R_6)} \\ \frac{R_6}{C_3(R_5+R_6)} & \frac{R_5+R_6+R_7}{C_3(R_5+R_6)R_7} & \frac{1}{C_3(R_5+R_6)} \\ \frac{R_5}{C_4(R_5+R_6)} & \frac{1}{C_4(R_5+R_6)} & \frac{R_5+R_6+R_8}{R_8C_4(R_5+R_6)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_9 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} +$$

$$
+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{C_3R_7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_4R_8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}. \tag{18}
$$

解常系数非齐次线性微分方程组（18）得 $i_9(t), v_3(t), v_4(t)$，进而可以求得各支路上的电流与电压。

我们看到，i_9, v_3, v_4 这三个量可以确定整个电路的状态，称 i_9, v_3, v_4 是此电路的**状态变量**，这种解法称为**状态变量法**，式（18）叫做**状态变量方程组**。一般地，列出状态变量方程组的步骤为：

（1）画出电路对应的网络$N(G, i(e,t))$。

（2）选一棵所谓正规生成树T，它含一切电压源，尽可能多的电容和尽可能少的电感以及一些电阻。

（3）按先是余树边后是树边的次序把边排序，使得

$$B_f(G)=[B_{11} \vdots B_{12}],\ C_f(G)=[I \vdots C_{f12}],$$

并求出 B_{12}^{-1} 与K。

（4）列出基本关系式(3)。

（5）从(3)中尽可能多地消去一些变量，剩余的变量即为状态变量。

（6）解状态变量方程

$$\dot{X}=MX+NU,$$

其中X是以状态变量为分量的列向列，M, N, U为已知矩阵。

有向图和无向图一样，也有八大矩阵：

$A(G), B(G), B_f(G), C(G), C_f(G), S(G), S_f(G), P(G)$。

而且有向图与其底图在相应的矩阵之定义及性质方面有许多相似之处。我们的注意力自然应集中到两者的区别上：

（1）有向图的邻接矩阵无对称性，而无向图的邻接矩阵是

对称的。

（2）在无向图中，$B(G), B_f(G), C(G), C_f(G), S(G), S_f(G)$ 的运算是在 0-1 二元域 F_2 中进行，$1+1=0$；而这些矩阵在有向图中的运算则在实数域 R 上进行。

（3）有向图中，定义 $C(G)$ 时比无向图多引入一个循环方向；定义 $S(G)$ 时，比无向图多引入一个流向。

（4）有些公式在有向图中有符号变化，例如 $C_f(G)=[I \vdots C_{f_{12}}], B_f(G)=[B_{11} \vdots B_{12}], S_f(G)=[S_{f_{11}} \vdots I]$，则

$$C_{f_{12}} = \pm B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1},$$

$$S_{f_{11}} = \pm C_{f_{12}}^T,$$

公式中，无向图取"+"号，有向图取"−"号。

本章引入的解电路问题的状态变量法是有向图的最重要的应用之一，这种方法——电路理论与计算中的先进方法被广泛采用。

习　　题

1．已知有向图 G 的邻接矩阵是

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

不许画图，回答 G 是否强连通，为什么？

2．求图 14.11 的极大强连通子图。

3．有向图 G 的关联矩阵为

$$B(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求 $\tau(G)$，并画出一切生成树。

4．写出图 14.12 中关于生成树 $T=G[\{a,b,c,d\}]$ 的基本

圈矩阵与基本割集矩阵。

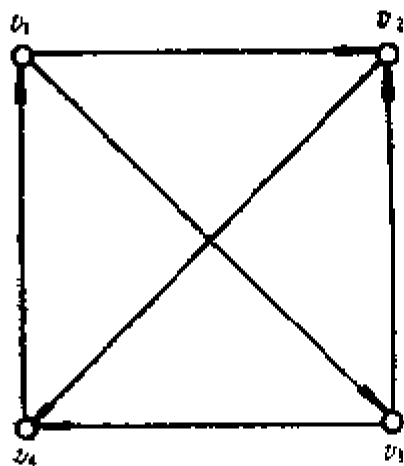


图 14.11

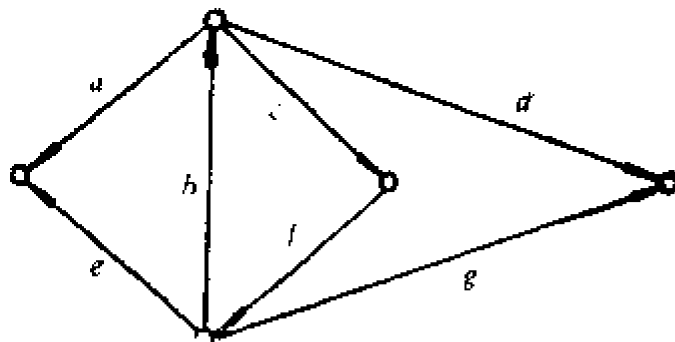
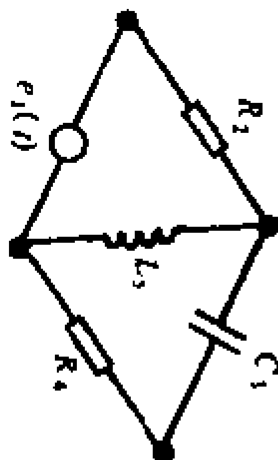


图 14.12

5．求图 14.13 中两个电路的状态变量方程组。



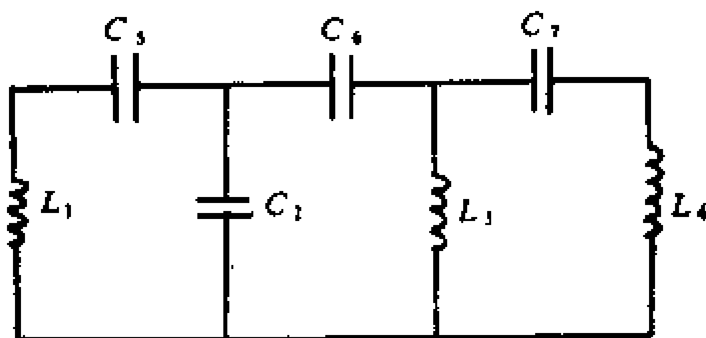


图 14.13

6．$B(G)$是有向图$G(V,E)$的关联矩阵，求

$$\sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|E|} b_{ij}=?$$

其中 b_{ij} 是 $B(G)$的元素。

又若 $G(V,E)$的邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{v\times v}$，说明

$\sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|V|} a_{ij}$ 的图论意义。

15 NPC概念和Cook定理

15.1 算法的好与坏

多年来，许多学者企图对任何组合问题都找一个有效算法来解决，可惜至今大家只是部分地得到成功，本书前面各章列出的种种算法，记录了这方面取得成功的一些重要成果。另外还有大批的问题，例如我们已经接触的工序问题、货郎问题、色数问题等，虽曾做过极大努力，仍未找到有效算法。人们发现了一个问题集团，其中包含的问题已经落实的就有几百个（以后还会增加），它们都被认真研究过，但其中任何一个问题皆未找出有效算法。虽然这个集团中的问题其实际背景与数学模型各异，但是已经严格证实，这个集团中的问题在算法的时间复杂度方面是共命运的，即若其中一个问题存在有效算法，则它们每个问题都有有效算法。当然，据此判定这些问题一定不会有有效算法，显然是不能令人信服的，但这种情形给出了一个很强的暗示，令人倾向于猜测这个问题集团可能真的不会有有效算法。

我们把描述一个问题的实例的数据之长度叫做**输入长**。

所谓**有效算法**，又称好算法，按Edmonds的定义，是指对给定的问题，存在一个多项式$P(n)$，使得对输入长为n的每个实例，最多用$P(n)$个基本运算步骤即得以解决。

这里“有效”二字体现于：

（1）在文献中发表的被公认是有效地解决了的问题所用的算法，皆属于Edmonds意义下的有效算法。

（2）任何一个难解问题（指上述共命运的问题集团中的问

题)，皆未发现Edmonds意义下的有效算法。

（3）Edmonds意义下的有效算法比指数时间的算法（例如穷举法）好得多。

例如算法A的时间复杂度是n^2，算法B的时间复杂度是2^n，其中n是输入长。假设计算的时间有限，例如是一个小时内必须完成，今有输入长为n_0的一个实例，使用计算机C来解。用B算法，一个小时内运算步骤必须不少于2^{n_0}个，若改用另一台更快速的计算机C'来解，C'是C运算速度的百倍，我们指望C'会解决输入长比n_0大得多的实例，但C'在一小时内处理的实例之输入长n满足

$$2^n = 2^{n_0} \times 100,$$

即

$$n = n_0 + \log_2 100 < n_0 + 7.$$

由此可见，由于算法B的笨拙，我们虽然把计算机计算速度提高了百倍，但用算法B去解决问题时，并未显示出大型快速计算机的优势来。我们已经意识到，虽然计算机的更新换代是必要的和令人鼓舞的进展，但从某种意义上来说，提供好的算法比机器提高速度更为有效。

对于同一个问题，若用A算法在C'机上去解，则可处理的输入长n满足

$$n^2 = 100n_0^2,$$
$$n = 10n_0.$$

这时可以处理输入长是C机上处理的输入长10倍的实例。若有一个算法的时间复杂度是输入长的线性函数，用此算法在C'机上去解可以处理比C机处理的输入长扩大百倍的实例。

下面的表格对有效算法与指数时间的算法的效果进行了具体比较。

时间复杂度	原计算机	扩大百倍速度的计算机	千倍速度计算机
n	N_1	$100N_1$	$1000N_1$
n^3	N_2	$4.64N_2$	$10N_2$
n^5	N_3	$2.5N_3$	$3.98N_3$
2^n	N_4	$N_4+6.64$	$N_4+9.97$
3^n	N_5	$N_5+4.19$	$N_5+6.29$

其中N_i($i=1,2,3,4,5$)是单位时间内可以处理的输入长之上界。我们看到，若用3^n这种时间复杂度的坏算法，既使机器的计算速度扩大千倍，输入长的增加也不到7。

下页的表是用每秒百万次计算机得出的，我们看到，输入长30的实例，在这种快速计算机上用3^n时间复杂度的算法尚需6年半的时间才能完成，而输入长为30的实例并不罕见；若用这种算法处理输入长为60的实例，则需要1.3×10^{13}个世纪！这实际上宣布了3^n时间复杂度的算法是无用的坏算法。

15.2 判定问题的NP类

我们称答案不是“是”就是“否”的问题为**判定问题**。有些问题，可以化成判定问题，例如边容量为自然数的网络上的最大流问题就可以化成：给定网络N与非负整数k，问是否存在流量不少于k的流函数？若回答说“是”，我们用$k+1$代替k，再提问同样的问题，如此可以找到最大流。

为了讨论判定问题的时间复杂度理论，我们引入Turing机的概念。Turing机是年轻的英国数学家Turing 1936年提出的一个数学概念，它并非什么机器，但它的功用却十分之大，不仅是研究计算复杂度理论的得力工具，而且为1946年真计算机之问世奠定了思想基础。

我们称下面的八重组为一部Turing机：

时间复杂度 \ 耗时 \ 输入长度	10	20	30	40	50	60
n	0.00001″	0.00002″	0.00003″	0.00004″	0.00005″	0.00006″
n^2	0.0001″	0.0004″	0.0009″	0.0016″	0.0025″	0.0036″
n^3	0.001″	0.008″	0.027″	0.064″	0.125″	0.216″
n^5	0.1″	3.2″	24.3″	1.7′	5.2′	13.0′
2^n	0.001″	1.0″	17.9′	12.9天	35.7年	366世纪
3^n	0.059″	58′	6.5年	3855世纪	2×10^8世纪	1.3×10^{13}世纪

$$(S,\Gamma,\Sigma,f,b,s_0,s_Y,s_N),$$

其中

$$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m,s_0,s_Y,s_N\}$$

是**状态集合**，s_0叫做**初态**，s_Y叫做Yes**态**，s_N叫做No**态**。

$$\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k,b\}$$

是**带符集合**，b叫做**空白符**。

$\Sigma\subset\Gamma$叫做**输入符集合**。

$b\in\Gamma-\Sigma$。

f：$(S-\{s_Y,s_N\})\times\Gamma\to S\times\Gamma\times\{1,-1\}$，

f叫做**转换函数**。

Turing 机上有一个无限长的“**纸 带**”，划分成$\cdots,C(-2)$，$C(-1),C(0),C(1),C(2),\cdots$**地址**序列。

Turing 机还具有一个“**读写头**”。

下面说明 Turing 机的操作及表达式。

（1）**头位函数**$h(t)$

读写头每个单位时间瞄准一个地址，若t时刻瞄准的地址是$C(i)$，则写成

$$h(t)=i.$$

规定

$$h(0)=1,$$

即开始时读写头在$C(1)$处。

（2）数据输入

设输入符集合为$\Sigma=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，记时刻$t$在$C(i)$处写的带符是$\gamma(i,t)$，且规定

$$\gamma(i,0)=x_i,\quad i=1,2,\cdots,n;$$

$$\gamma(i,0)=b,\quad i\neq1,2,\cdots,n.$$

（3）**转换函数**f

设时刻t之状态为$s(t)\in S-\{s_Y,s_N\}$，则

$$f(s(t),\gamma(h(t),t))=(p,q,d),$$

其中

$$(S(t),\gamma(h(t),t))\in(S-\{s_Y,s_N\})\times\quad,$$

$$(p,q,d)\in S\times\Gamma\times\{1,-1\}.$$

含义是

$$s(t+1)-p,$$

$$h(t+1)=h(t)+d,$$

$$\gamma(i,t+1)=\begin{cases}q, & i=h(t);\\ \gamma(i,t), & i\neq h(t).\end{cases}$$

（4）停机

$s(t)\in\{s_Y,s_N\}$时停机。

Turing **机解决了一个判定问题D，是指：**

对任意给定的D的一个实例，这个实例用字符$x_1,x_2,\cdots,x_n$表达时，实例答案为“是”当且仅当以$x_1,x_2,\cdots,x_n$做为输入，Turing **机停机于s_Y态。**

定义 1　对于判定问题D，存在一个多项式$P(t)$，使得对其每一输入长为n的实例，Turing **机可以在$P(n)$时间内解决；此种问题D的全体组成的集合叫做P类问题集合，记之为P。**

有许多问题，我们虽然尚不知其有无多项式算法，但给出一些附加信息，则可以在多项式时间内由 Turing 机加以解决。例如“图G是否 Hamilton 图？”众所周知，这个问题是个难解问题，但若给出G的一个子图，则在多项式时间内可以验证它是否为G的 Hamilton 圈。

设 Turing 机开始计算前，把某些信息存入$C(-1),C(-2)$，…等地址，称符号列

$$\gamma(-1,0),\gamma(-2,0),\cdots=g_1g_2\cdots$$

为一个猜想。

我们注意到，若 Turing 机的计算时间以某个多项式$P(n)$为上界，则不要把比$P(n)-1$长的猜想存入机器中去，因为地址$C(-P(n))$在计算中达不到。

一个判定问题D在不确定 Turing 机上在多项式时间内被解决是指：对于问题D，存在多项式$P(n)$，使得对D的输入长为n的实例，若其答案为“是”，则存在一个猜想，对于它，机器在$P(n)$时间内停机于S_Y态；若其答案是“否”则对于每个猜想，在$P(n)$时间内 Turing 机皆停机于S_N态。

不确定 Turing 机概念中“不确定”二个字的含义是：上述的“若答案为‘是’，则存在一个猜想，对于它，机器停机于S_Y态”一语中，我们只是相信有这么一个猜想存在，但并未给出什么确定的方法可以找到这个猜想。也许我们侥幸碰上了这么一个猜想，但这种幸运是罕见的；或者这个实例之答案是否定的，这时，要逐个验算猜想，而猜想可有$|\Gamma|^{p(n)-1}$个，要用$P(n)|\Gamma|^{p(n)-}$时间来完成，这是一个可怕的指数时间，会随着$P(n)$之增大而爆炸性增大，所以用这种方法来求解，实际上是不现实的，也就是说，用Turing 机如此解决问题不可能实际地得出确定的答案。

不确定 Turing 机对于解决问题实际上是个无效的工具，它只有理论上的价值，借助于它，我们可以建立 NP 概念。

定义 2　在多项式时间内能被不确定 Turing 机解决的判定问题之集合叫做 NP 类判定问题集合，记做NP。

显然，P⊂NP。但 P＝NP 是否成立？这是一个尚未解决而其意义十分之深远的问题。

15.3　NPC与Cook定理

定义 3　D_1与D_2是两个判定问题，存在一个映射f，以及一个多项式$Q(n)$，使得对于任集给定的D_1的一个实例的输入I_1，I_1之长为n，则f在$Q(n)$时间内把I_1映射成D_2的一个集入$f(I_1)$，且I_1的答能是“是”当且仅当$f(I_1)$的答案是“是”，集称在多项式时间内D_1转化成D_2，记之为$D_1\propto D_2$。

定义 4　若判定问集$D\in$NP，且$\forall D'\in$NP，有$D'\propto D$，则

称$D\in$NPC，即NPC是下面的判定问题集合：

NPC $=\{D|D$是判定问题，$D\in$NP，$\forall D'\in$NP 时，$D'\propto D\}$。

这个定义是 Karp 于1972年提出的。

推论 1 设D_1，D_2是两个判定问题，$D_1\propto D_2$，$D_2\in$P，则$D_1\in$P。

证 设I_1是D_1之输入，输入长$|I_1|=n$，又$D_1\propto D_2$，则存在映射f及多项式$Q(x)$，使得$f(I_1)$是D_2的一个输入，此映射可于$Q(n)$时间内完成；又由于$D_2\in$P，故存在多项式$P(x)$（不妨设$P(x)$单调上升），使得对于D_2之输入$f(I_1)$，在$P(|f(I_1)|)$时间内解决，又$|f(I_1)|\leqslant Q(n)$，所以$f(I_1)$可于多项式时间$P(Q(n))$内解决，于是，I_1亦可在多项式$Q(n)+P(Q(n))$时间内解决，即$D_1\in$P。**证毕**。

推论 2 D_1，$D_2\in$NPC，则$D_1\propto D_2$。

证 由于$D_1\in$NPC，则$D_1\in$NP；又$D_2\in$NPC，由定义，$\forall D'\in$NP，$D'\propto D_2$，取$D_1=D'$，则$D_1\propto D_2$，证毕。

推论 2 告知，NPC 内各问题间在时间复杂度方面是等价的（或多项式可归约的）。

由推论 1 可得

推论 3 若$D\in$NPC，假设$D\in$P，则 NP $=$ P。

证 因$D\in$NPC，则$D\in$NP，且$\forall D'\in$NP，$D'\propto D$，假设$D\in$P，由推论 1，$D'\in$P，即NP$\subset$P。又P$\subseteq$NP，故得P$=$NP。**证毕**。

推论 4 $D\in$NPC，假设$D\in$P，则NPC$\subseteq$P；若$D\in$NPC，假设$D\notin$P，则NPC$\cap$P$=\varnothing$。

证 由推论3知当$D\in$NPC，且$D\in$P时，NP$=$P，但NPC$\subseteq$NP，故得NPC$\subseteq$P。另一方面，若$D\in$NPC，$D\notin$P，但NPC$\cap$P$\neq\varnothing$，则存在一个$D_1\in$NPC$\cap$P，即$D_1\in$P，$D_1\in$NPC。由推论 4 前半段的结论，NPC$\subseteq$P，于是$D\in$P，与$D\notin$P 矛盾，所以当$D\in$NPC，$D\notin$P时，则NPC$\cap$P$=\varnothing$。**证毕**。

推论 4 告知，NPC中的问题,只要有一个是P类的,则个个都是P类的，即NPC中的问题皆存在有效算法（但愿如此！），但若发现某个NPC中的问题不是P类的，即它无有效算法,则 NPC 中各个问题皆无有效算法！NPC 问题在有无有效算法的意义下是共命运的。

定理 1（**NP 完备性定理**）**若**$D\in$NPC，$D'\in$NP，$D\propto D'$，**则**$D'\in$NPC。

证　因$D\in$NPC，故$\forall D''\in$NP，$D''\propto D$；又知$D'\in$NP，且$D\propto D'$，则$D''\propto D'$，由定义$D'\in$NPC。**证毕。**

目前，有些意见倾向于NP $\neq$ P，P $\cap$ NPC $=\varnothing$，NP $-$ NPC $-$ P $\neq\varnothing$（见图15.1）。但这种看法的真伪并未得到证明。

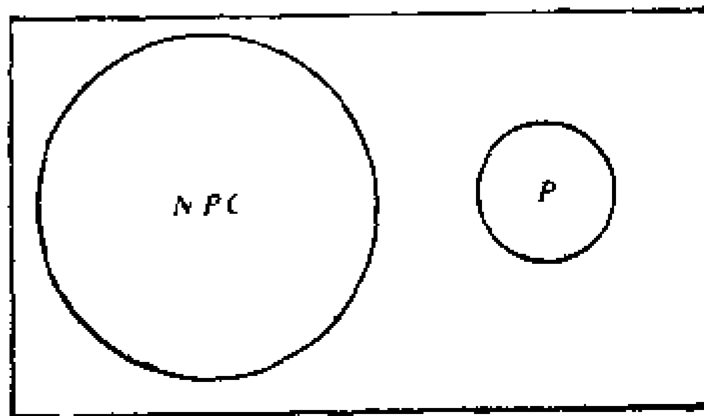


图　15.1

1972年，多伦多大学的 Cook 找到了第一个NPC问题，它的代号为 SAT(Satisfiability)。以它为NPC家族的“种子”，由定理 1，繁衍出大批NPC中的问题。

设有限变量集

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

X中的每个变量可以取T与F两个值之一，且$x_i=T$,则$\bar{x}_i=F$；$x_i=F$，则$\bar{x}_i=T$。

称

$$L=\{x_1,x_2,\cdots,x_n;\ \bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\}$$

为**字集合**，字集合的子集叫做**句子**。

SAT 的实例是：任意给定一个句子集合 $\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$，是否有一种赋值方法，使得每个句子 C_i 中皆有 T 值的字？

句子中有的字取 T 值时，则此句子称为**饱和**的。

SAT：

输入：一个句子集合.

问：是否存在一种赋值方法，使这些句子皆饱和？

定理 2 (Cook) $SAT \in NPC$。

证 $SAT \in NP$是显然的。下证 $\forall D \in NP$，皆有 $D \propto SAT$。即当 I 是D的长 n 的输入时，要证存在一个映射 f，使得$f(I)$是 SAT 的一个输入，此映射耗时为多项式 $Q(n)$，且 I 回答"是"当且仅当$f(I)$回答"是"。

所谓机器对 I 回答"是"，是指存在一个猜想，机器在多项式时间 $P(n)$内停机于 S_Y 态，即 Turing 机有序地执行以下步骤：

(1) 初始时，I 由$C(1)$，$C(2)$，$\cdots$，$C(n)$ 处的内容表达出来；而$C(0)$，$C(n+1)$，$C(n+2)$，$\cdots$，$C(P(n)+1)$皆为空白。

(2) 初始态是S_0，开始时头在$C(1)$，即$h(0)=1$。

(3) 对于每一时刻 t，$0 \leqslant t \leqslant P(n)$，机器恰在一种状态下。

(4) 对于每一时刻 t，$0 \leqslant t \leqslant P(n)$，每个地址$C(i)$ 处恰写一个带符，$-P(n)+1 \leqslant i \leqslant P(n)+1$。

(5) 对于每个时刻 t，$0 \leqslant t \leqslant P(n)$，头恰在一个地址$C(i)$上，$-P(n)+1 \leqslant i \leqslant P(n)+1$。

(6) 仅当时刻 t 头在此地址上，该地址的内容才能从时刻 t 到时刻 $t+1$ 的情况下改变。

(7) 若$S(t) \in S - \{s_Y, s_N\}$，则 $S(t+1)$，$\gamma(h(t), t+1)$，$h(t+1)$ 由 f 确定。若 $s(t) \in \{s_Y, s_N\}$，则 $s(t+1)=s(t)$。

(8) $s(P(n)) = s_Y$。

为明确起见，把记号规定如下：

$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_q\}$，$s_1 = s_Y, s_2 = s_N$。

i：地址，$i = C(i)$，$-P(n)+1 \leqslant i \leqslant P(n)+1$。

j：带符，$0 \leqslant j \leqslant g$，$\Gamma=\{\gamma_0=b,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_g\}$，$j=\gamma_j$。

k：状态，$0 \leqslant k \leqslant q$，$k=s_k$。

$I=x_1x_2x_3\cdots x_n$。

取SAT的变量集为

$$X=\{G(i,t,j)\}\cup\{H(i,t)\}\cup\{s(t,k)\}。$$

显然变量G的个数是$O(P^2(n))$，H的个数是$O(P^2(n))$，S的个数是$O(P(n))$。

赋值方法为：

当且仅当$\gamma(i,t)=\gamma_j$（时刻t，$C(i)$处的带符是γ_j），$G(i,t,j)=T$；

当且仅当t时刻头在$C(i)$上，$H(i,t)=T$；

当且仅当时刻t状态为s_k，$S(t,k)=T$。

取句子集合为$\bigcup_{i=1}^{6}S_i$，S_i如下：

$$S_1=\{\{G(i,0,j)\}\mid 1\leqslant i\leqslant n,\ x_i=\gamma_j\}$$
$$\cup\{\{G(i,0,0)\}\mid n<i\leqslant P(n)+1\}\cup\{\{G(0,0,0)\}\}。$$

$$S_2=\{\{s(0,0)\},\{H(1,0)\}\}。$$

$$S_3=\bigcup_t[\{\{S(t,0),S(t,1),\cdots,S(t,q)\}\}\cup\bigcup_{k_1<k_2}\{\{\overline{S(t,k_1)},\overline{S(t,k_2)}\}\}]。$$

$$S_4=\bigcup_t\bigcup_i[\{\{G(i,t,0),G(i,t,1),\cdots,G(i,t,g)\}\}\cup\bigcup_{j_1<j_2}\{\{\overline{G(i,t,j_1)},\overline{G(i,t,j_2)}\}\}]。$$

$$S_5=\bigcup_t[\{\{H(-P(n)+1,t),H(-P(n)+2,t),\cdots,H(P(n)+1,t)\}\}\cup\bigcup_{i_1<i_2}\{\{\overline{H(i_1,t)},\overline{H(i_2,t)}\}\}]。$$

$$S_6=\bigcup_{i}\ \bigcup_{0\leqslant t<p(n)}\ \bigcup_{j}\{\{H(i,t),G(i,t,j),\overline{G(i,t+1,j)}\}\}.$$

$$S_7=\bigcup_{i}\ \bigcup_{0\leqslant t<p(n)}\ \bigcup_{k=1,2}\ \bigcup_{j}\{\{\overline{S(t,k)},\overline{H(i,t)},$$

$$\overline{G(i,t,j)},S(t+1,k')\},\{\overline{S(t,k)},\overline{H(i,t)},\overline{G(i,t,j)},$$

$$G(i,t+1,j')\},\{\overline{S(t,k)},\overline{H(i,t)},\overline{G(i,t,j)},H(i+d,$$

$$t+1)\}\mid f(s_k,r_j)=(s_{k'},r_{j'},d)\}\cup\bigcup_{t<p(n)}\{\{\overline{S(t,1)},$$

$$S(t+1,1)\},\{\overline{S(t,2)},S(t+1,2)\}\}.$$

$$S_8=\{\{S(p(n),1)\}\}.$$

可以验证 S_i 中句子皆饱和的充要条件是 Turing 机执行步骤（i），$1\leqslant i\leqslant 8$。至此，Cook 定理证毕。

下面考虑由 SAT 在多项式时间内转化的另一个NPC问题，它的代号为3SAT。

3SAT：

输入：一个句子集合，每句恰含三个字。

问：是否存在一存赋值方法，使每句皆饱和？

定理 3 3SAT$\in$NPC。

证 我们来证明 SAT$\propto$3SAT（3SAT$\in$NP 是显然的）。为此，令

$$S_1=\{\{a,b,c,d\}\}\cup S',$$

$$S_2=\{\{a,b,x\},\ \{\bar{x},c,d\}\}\cup S',$$

其中 x 在 S_1 中不出现。

首先证明，S_1 可饱和当且仅当 S_2 可饱和。若有赋值方法使 S_1 句句饱和，则这一赋值法可使 S_2 中的 S' 中之句子皆饱和，且 S_2 的前两个句子至少有一个饱和的，再对 x 赋值，使 S_2 中的前两个句子都饱和，于是 S_2 句句饱和。反之，若有一个赋值法使 S_2 句句饱和，则这一赋值法使 S_1 中 S' 部分的句

子皆饱和，且a,b,c,d中至少有一个值为T，故这一赋值法可使S_1句句饱和。

上面事实告知，一个长4的句子可由两个长3的句子代替，通过$l-3$个新变量的引入，一个长$l\,(l>3)$的句子可由$l-2$个长3的句子代替：句子$\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$被$\{a_1,a_2,x_1\},\{\bar{x}_1,a_3,x_2\},\cdots,\{\bar{x}_{l-3},a_{l-1},a_l\}$代替。若一赋值使$a_1,a_2,\cdots,a_l$中有一个变量取$T$值，则长句$\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$饱和，这时，

若a_1或a_2为T，则令$x_1=x_2=\cdots x_{l-3}=F$，

若a_{l-1}或a_l是T，则令$x_1=x_2=\cdots=x_{l-3}=T$。

若某个$a_k=T$，$2<k<l-1$，则令$x_1=x_2=\cdots=x_{k-2}=T$，$x_{k-1}=x_k=\cdots=x_{l-3}=F$，

以上三种可能至少发生一种，每种情形发生时，上述那些长3的句子皆饱和。

若$a_1,a_2,\cdots,a_l$皆F，长句未饱和，这时无法给x变量赋值，使$l-2$个短句皆饱和。

我们看到，长句被短句代替所用的时间是以描述原句子集输入长的多项式为界。变成的句子集中，句子数目以原句子集中字的数目为界，且变成的句子每个至多含三个字，即SAT$\propto$3SAT，**证毕**。

15.4　NPC中的几个组合问题

应第16章之需，我们这里讲几个组合问题，它们属于NPC。

三维匹配问题，代号3DM：

输入：W，X，Y**是三个集合**，$|W|=|X|=|Y|=p\neq0$，
$M\subseteq X\times Y\times W$。

问：是否存在$M'\subseteq M$，$|M'|=p$，**且**M'**中无两个有相同分量的三元组。**

例如$W=X=Y=\{0,1\}$，$M=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),$

(1,0,0)},则 3DM 之回答是“否”,若在M中再加入一个(1,0,1),则取$M'=\{(0,1,0),\ (1,0,1)\}$,这时 3DM 的回答是“是”。

定理 4 3DM∈NPC。

证 显然3DM∈NP,下证3SAT∝3DM。

令3SAT之输入为$I=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$,$x_1,x_2,\cdots,x_n$是出现于I中的变量。我们来构作3DM的一个输入$f(I)$中的W,X,Y,M。

$$W=\{x_{ij},\bar{x}_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\},$$

$$X=A_1\cup S\cup G,$$

$$Y=A_2\cup S\cup G,$$

$$A_1=\{a_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\},$$

$$A_2=\{b_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\},$$

$$S=\{s_j\mid 1\leqslant j\leqslant m\},$$

$$G=\{g_k\mid 1\leqslant k\leqslant m(n-1)\},$$

$$M=AC\cup SC\cup GC,$$

$$AC=\bigcup_{i=1}^{n}AC_i,$$

$$\begin{aligned}AC_i=&\{(x_{ij},a_{ij},b_{ij})\mid 1\leqslant j\leqslant m\}\cup\\&\{(\bar{x}_{ij},a_{i\,j+1},b_{ij})\mid 1\leqslant j\leqslant m-1\}\cup\\&\{(\bar{x}_{im},a_{i1},b_{im})\}.\end{aligned}$$

图15.2表示AC_i的结构,其中每个圈内为一个三元组,标志i已被省略,每个a_{ij},b_{ij}参加两个三元组,对每个i,M'要么含形如(x_{ij},a_{ij},b_{ij})的三元组,要么含所有其它类型的三元组,但不能混合。此即表明所有出现的x_i或皆T或皆F。

$$SC=\bigcup_{j=1}^{m}SC_j,$$

$$\begin{aligned}SC_j=&\{(x_{ij},s_j,s_j)\mid x_i\in C_j\}\cup\\&\{(\bar{x}_{ij},s_j,s_j)\mid \bar{x}_i\in C_j\}.\end{aligned}$$

由 3SAT 之定义，每个 SC_j 中含三个三元组，为了使 s_j 做为第二与第三分量，仅一个三元组在 M' 中，显然，这只能是：$x_{ij}(\bar{x}_{ij})$ 在 $M' \cap AC$ 中未用过，即 x_i 给以真（假）赋值。

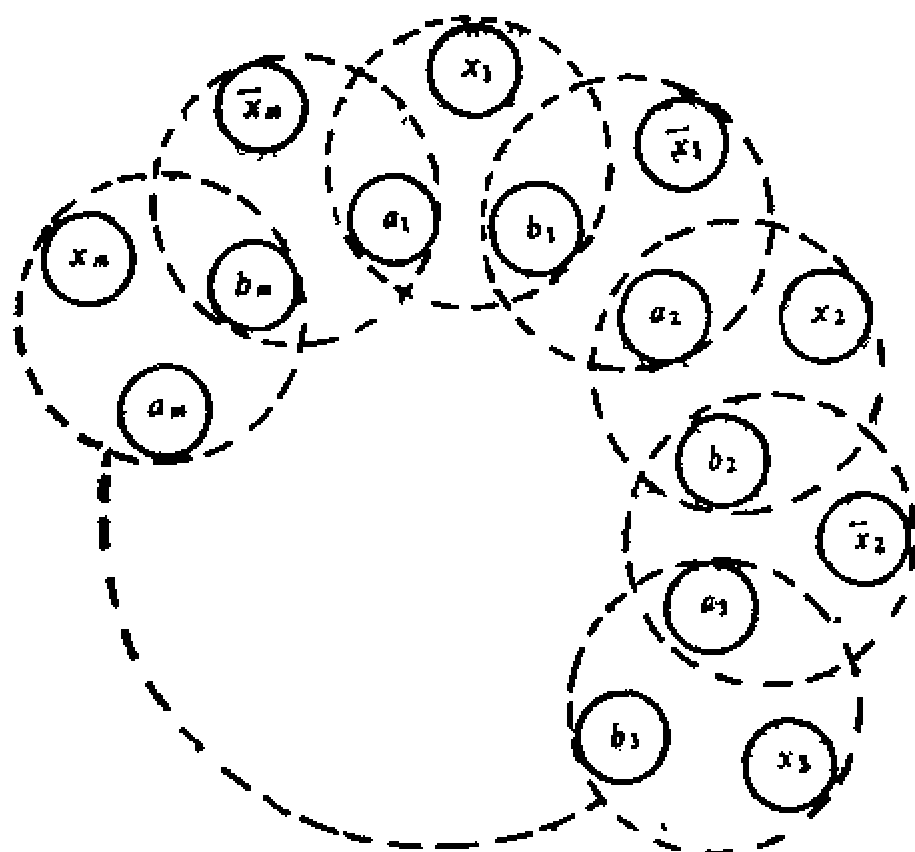


图 15.2

令 $M' \cap (AC \cup SC)$ 用了W的 $mn+m$ 个元素，为含其余 $m(n-1)$ 个元素，我们有

$$GC = \{(x_{ij}, g_k, g_k), (\bar{x}_{ij}, g_k, g_k) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant m(n-1)\}.$$

证毕。

下面再讨论一个著名的组合问题，它称为**三元素子集精确覆盖问题**，代号 3XC。

3XC：

输入：集合 U 及其三元素子集族团 C。

问：C 中是否存在子族团，使其精确覆盖 U？

即若 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 3 元素集合，且对每个 i，$1 \leqslant i \leqslant n$，

$S_i \subset U$，问是否存在$I \subset \{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$\bigcup_{i \in I} S_i = U,$$

且$i,j \in I$，$i \neq j$时，$S_i \cap S_j = \varnothing$。换句话说，问是否存在$U$的一个划分，得到的子集皆三个元素，且划分出的子集在预先指定的三之素子集团C之中。

定理 5　3XC∈NPC。

证　3XC 显然是 NP 问题。下证 3DM∝3XC。设W，X，Y，M是 3DM 之输入I，其中$M \subseteq W \times X \times Y$，且$W$，$X$，$Y$两两不相交，不然，把公共元素改变一下名称即可。取

$$C = \{\{w,x,y\} \mid (w,x,y) \in M\}.$$

$$U = W \cup X \cup Y.$$

下证C有子集精确覆盖U的充要条件是存在完备匹配$M' \subset M$。显然，若M'是一个完备匹配，则

$$C' = \{\{w,x,y\} \mid (w,x,y) \in M'\}$$

是U的一个精确覆盖。反之，若C'是U的一个精确覆盖，则

$$M' = \{\{w,x,y\} \mid \{w,x,y\} \in C'\}$$

是一个完备匹配。**证毕**。

在 3XC 中，若不要求每个子集皆 3 个元素，则问题变成所谓**精确覆盖问题，其代号为** XC。

定理 6　XC∈NPC。

定理 6 的证明只要论证 3XC∝XC，留作习题，请读者完成。

最后研究代号为 SC 的**集合覆盖问题**。

SC：

输入：**集合U，U的子集集团C，整数k。**

问：**是否存在C的子集团C'，使得C'覆盖U，且C'中集合的数目不超过k？即**

$$\bigcup_{S \in C'} S = U, \text{ 且} |C'| \leqslant k.$$

定理 7 $SC \in NPC$。

证 只需证 $3XC \propto SC$，设 C 与 U 是 3XC 的输入 I。令

$$k = \lfloor |U|/3 \rfloor。$$

取 C, U, k 做为 SC 之输入 $f(I)$。若 $|U|$ 被 3 除不尽，则 3XC 答案为"否"，这时 SC 之答案亦为"否"。若 $|U|$ 可被 3 除尽，这时，若 C' 是一个精确覆盖，C' 当然也是一个覆盖，且 $|C'| = |U|/3 = k$；反之，若 C' 是一个覆盖，$|C'| \leqslant k$，则 $|C'| = k$，因而是一个精确覆盖，**证毕**。

在 SC 中，若每个子集皆含 3 个元素，则 SC 变成 3SC 问题。

定理 8 $3SC \in NPC$。

证明请读者给出。

本章我们学习了 Edmonds 意义下有效算法的概念，引入 Turing 机，进而定义了 P，NP 与 NPC 三个问题集合。一般总是用 Turing 机作为描述算法过程的基本数学模型。任何能在现代数字计算机上实现的计算都能用 Turing 机来描述。

计算复杂性理论不仅是计算机专家最感兴趣的问题之一，而且是应用数学家必须过问和研究的重大课题。它使我们用精确的概念来审定问题究竟是否难解，而不是凭直观的感觉粗略地判定一个算法的好坏。

1972 年，Cook S A 提出的关于 $SAT \in NPC$ 的基本定理，奠定了计算复杂性分析的理论基础，同年 Karp R M 提出 21 个 NP 问题可由 SAT 转化（$\propto$），从而得到了第一批 NPC 中的问题；到 1978 年，NPC 问题已经由 21 个迅速增加到 300 多个，其中有不少是图论中的问题。近年来，人们仍然热衷于确定某些实际问题与理论问题的计算是否 NPC 问题。

至于 NPC 中的问题是否真的不存在多项式算法，是当今科学界面临的重大课题之一。显然，这一问题的解决，即回答

"P=NP 否?",是一个十分困难而有意义的工作!如果 P=NP,就应该为 NPC 中的问题设计有效算法;若 P≠NP,就不要再指望有效地解决 NPC 中的问题。有些问题人们还考虑它的计算复杂度是否介于 P 与 NPC 之间,即 NP 中的问题能否有更细的划分。关于 NP 的完全性理论尚处于发展之中。

为了研究图论中的 NPC 问题,本章介绍了组合论中的几个 NPC 问题,它们是:

SAT,3SAT,3DM,3XC,XC,SC,3SC。

本章涉及的思想、概念和技巧都很不通俗,颇有几分难懂,但它们是搞计算机科学和应用数学的必要知识,所以必须下力气彻底弄明白。Cook 定理等本章提到的定理不论是证明的思路还是技巧与细节,都十分新颖生动而引人入胜,很值得学习。

习　题

1. 称 $M \subset X \times Y \times W$ 是分段调和的,若对于一切 a,b,c,x,y,w,$\{(a,b,y),(a,x,c),(w,b,c)\} \subset M$,表明 $(a,b,c) \in M$。证明:即使 M 限定为分段调和,3DM 仍属于 NPC。

2. 包装问题,代号 SP (Set packing):

输入:一个集合集团 C,正整数 k。

问:C 中是否存在 k 个两两不相交的集合?

证明:$SP \in NPC$。

(例如:C 是一盒一盒的什锦糖果,要从 C 中选取 k 盒出来包装在一个大箱子里,使箱子中任意两盒糖中没有相同味道的糖果,这种要求能否实现?)

3. 相遇集问题,代号 HS (Hitting set):

输入:集合 U 的子集集团 C,正整数 k。

问:是否存在子集 $U' \subseteq U$,使得 $|U'| \le k$,且 U' 与 C 中每个集合交非空?

试证:$HS \in NPC$。

（例如：人们组织了一些团体，我们欲采访每个团体里至少一个人，但囿于时间，被采访的总人数不得超过 k 名，问是否可能？）

4. 背包问题，代号 0-1 KNAP(0-1 Knapsack)：

输入：正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$。

问：是否存在 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$，使得

$$\sum_{i \in I} a_i = b?$$

试证：0-1 KNAP $\in$ NPC。

（例如：一个背包至多只能装 b 公斤，今有 a_1 公斤，a_2 公斤，$\cdots, a_n$ 公斤 n 件东西，问能否从中挑选几件，使得总重量恰为 b 公斤？）

5. 划分问题，代号 PART(Partition problem)：

输入：正整数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$。

问：是否存在 $J \subset \{1, 2, \cdots, m\}$，使得

$$\sum_{i \in J} p_i = \sum_{i \notin J} p_i.$$

试证：PART $\in$ NPC。

（例如：m 个盒子中密封了相同的球，不许拆开盒子，能否把这些球平分？）

6. 试证：XC $\in$ NPC。

7. 试证：3SC $\in$ NPC。

16 NPC中若干著名的图论问题

本章从一百多个已知的NPC的图论问题当中选择最著名的若干问题，详细证明它们属于NPC，借以体现证明图论问题为NPC问题时所用方法与技巧的一些特色；我们马上就能体会到，欲证明一个图论问题属于NPC是何等的困难和讲究技巧。

16.1 团、独立集和顶覆盖

首先讲最大团问题，代号CLIQUE：

输入：无向图$G(V,E)$，正整数$k\leqslant|V|$。

问：G中是否有一个团C，使得$|C|\geqslant k$？其中$|C|$是C的顶数。

定理1 CLIQUE∈NPC。

证 显然，CLIQUE∈NP，下证3DM∝CLIQUE。

设I是3DM的输入，I为W,X,Y，$M\subseteq W\times X\times Y$；取$f(I)$为CLIQUE的相应输入，$f(I)$中$k=|X|$，图$G(V,E)$为

$$V(G)=M,$$

$$E(G)=\{e=m_1m_2\mid m_1,m_2\in M,\ \text{且}\ m_1\ \text{与}\ m_2\ \text{无相同的对应分量}\},$$

于是I“是”当且仅当$f(I)$“是”。证毕。

CLIQUE问题的解决实际上意味着找到G中顶数最大的团的顶数，可惜这个问题属于NPC，这个貌似简单的问题实则非常困难。

下面讨论最大独立集问题，代号IND：

输入：图 $G(V,E)$，**正整数** $k\leqslant|V|$。

问：是否存在独立集 S，**使得** $|S|\geqslant k$？

定理2 IND∈NPC。

证 显然 IND∈NP，下证 CLIQUE∝IND。事实上，若 I 是 CLIQUE 的输入，I 由 $G(V,E)$ 与自然数 k 组成，则取相应的 IND 的输入 $f(I)$ 为 G 的补图 G^c 与 k，这时，显然有：I"是"当且仅当 $f(I)$"是"。**证毕。**

最后讲一下最小顶覆盖问题，代号 VC：

输入：图 $G(V,E)$，**自然输** $l\leqslant|V|$。

问： G **中是否有顶覆盖** C，**使得** $|C|\leqslant l$？

定理3 VC∈NPC。

证 VC∈NP 不足道。下证 IND∝VC。设 $G(V,E)$ 与 k 是 IND 之输入 I，相应的 VC 之输入 $f(I)$ 取为 $G(V,E)$ 与 $l=|V|-k$，由独立集与顶覆盖集的互补性知，I"是"当且仅当 $f(I)$"是"，**证毕。**

16.2 Hamilton 轨和 Hamilton 圈

有向 Hamilton **轨问题，代号** DHP：

输入：有向图 $G(V,E)$，$s,t\in V(G)$。

问： G **中是否有有向** Hamilton **轨** $P(s,t)$？

定理4 DHP∈NPC。

证 显然 DHP∈NP，下证 VC∝DHP。设 VC之输入 I 为 $G(V,E)$ 及自然数 $k\leqslant|V|$，下面给出相应的 DHP 之输入 $f(I)$。

设 $e(v,1)$，$e(v,2),\cdots,e(v,d(v))$ 是 $G(V,E)$ 中与顶 v 关联的边，$f(I)$ 中的有向图 $G'(V',E')$ 构作如下：

$$V'=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\cup\bigcup_{v\in V(G)}\{(v,1,i),(v,2,i)\mid 1\leqslant i\leqslant d(v)\}.$$

即把无向图 $G(V,E)$ 的每个顶 v 变成 $2d(v)$ 个顶，再添加 $k+1$ 个

新顶 $a_0, a_1, \cdots, a_k$，这些顶合起来构成有向图 G' 的顶集合 V'。

$$E' = \{a_i \to (v,1,1) \mid 0 \leqslant i < k, v \in V(G)\} \cup$$
$$\{(v,2,d(v)) \to a_i \mid 0 < i \leqslant k, v \in V(G)\} \cup$$
$$\{(u,1,i) \to (v,1,j), (u,2,i) \to (v,2,j)$$
$$\mid e(u,i) = e(v,j)\} \cup$$
$$\{(v,1,i) \to (v,2,i) \mid v \in V(G), 1 \leqslant i \leqslant d(v)\} \cup$$
$$\{(v,2,i) \to (v,1,i+1) \mid v \in V(G), 1 \leqslant i < d(v)\}.$$
$$s = a_0, \quad t = a_k.$$

我们称顶 v “内部由 $(v,1,1)$ 到 $(v,2,d(v))$” 的有向轨为顶 v 之“迹”。下证 G' 中有 Hamilton 轨 $p(a_0, a_k)$，当且仅当 G 中有 k 顶顶覆盖。

设 $C = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 是 G 中一个顶覆盖，我们来构作 G' 中的一个 Hamilton 轨 $P(a_0, a_k)$。取边 $a_0 \to (v_1,1,1)$，通过 v_1 的迹到达 $(v_1,2,d(v_1))$，再到 a_1，由 a_1 到 $(v_2,1,1)$，经 v_2 之迹到达 $(v_2,2,d(v_2))$，再到 $a_2, \cdots$，最后从 $(v_k,2,d(v_k))$ 到达 a_k，得到一条 G' 中的有向轨 $P'(a_0, a_k)$。但 $P'(a_0, a_k)$ 不一定是 G' 的 Hamilton 轨。若 $P'(a_0, a_k)$ 不是 Hamilton 轨，$\forall v \overline{\in} C$，且 $e = uv \in E(G)$，$e = e(v,j) = e(u,i)$，则 $u \in C$。这时，用 $(u,1,i) \to (v,1,j) \to (v,2,j) \to (u,2,i)$ 代替 P' 中的 $(u,1,i) \to (u,2,i)$。由于 C 是顶覆盖，v 在 G' 中“分裂”成的 $2d(v)$ 个顶都被通过仅一次，于是得到了 G' 中的 Hamilton 轨 $P(a_0, a_k)$。

反之，若 G' 中有 Hamilton 轨 $P(a_0, a_k)$，则我们能构作出 G 的一个 k 顶的顶覆盖 S：当且仅当 $(v,1,1)$ 与 $(v,2,d(v))$ 在 $P(a_0, a_k)$ 上皆与 $\{a_i\}$ 中顶相邻时，取 $v \in S$。**证毕。**

有向 Hamilton **圈问题，代号** DHC：

输入：有向图 $G(V,E)$。

问：$G(V,E)$ **中是否存在有向** Hamilton **圈？**

定理5 DHC$\in$NPC。

证 DHC 显然为 NP 问题。下证 DHP$\propto$DHC。设 DHP 之

输入 I 为 $G(V,E)$ 及二项 s,t，相应的 DHC 的输入 $f(I)$ 取为 $G'(V',E')$，其中

$$V'=V(G)\cup\{a\},$$
$$E'=E(G)\cup\{a\to s, t\to a\}.$$

显然，$G'(V',E)$ 中有 Hamilton 轨 $P(s,t)$ 当且仅当 G' 中有 Hamilton 圈。**证毕。**

无向图中的 Hamilton **轨问题，代号** HP：

输入：无向图 $G(V,E)$，**二项** $s,t\in V(G)$。

问：G **中是否存在无向** Hamilton **轨** $P(s,t)$？

定理6 HP$\in$NPC。

证 显然有 HP$\in$NP。下证 DHP$\propto$HP。

设 DHP 之输入 I 为有向图 $G(V,E)$，二项 $s,t\in V(G)$，相应的 HP 之输入 $f(I)$ 取为 $G'(V',E')$ 及 $(s,0),(t,2)\in V'$。

$G'(V',E')$ 构作如下：

$$V'=\{(v,0),(v,1),(v,2)\mid v\in V(G)\},$$
$$E'=\{(v,0)-(v,1),(v,1)-v(2)\mid v\in V(G)\}\cup$$
$$\{(u,2)-(v,0)\mid e=uv\in E(G)\}.$$

显然，$G(V,E)$ 中有有向 Hamilton 轨 $P(s,t)$ 时，G' 中有无向 Hamilton 轨 $P'((s,0),(t,2))$。

反之，若 $P'((s,0),(t,2))$ 是 $G'(V',E')$ 中的 Hamilton 轨，我们可以追踪 $P'((s,0),(t,2))$，并从 $(s,0)$ 开始把每三个在 P' 上相邻的顶小组 $\{(v,0),(v,1),(v,2)\}$ 合成一个顶，从而得 $G(V,E)$ 中的一条有向 Hamilton 轨 $P(s,t)$。**证毕。**

无向 Hamilton **圈问题，代号** HC：

输入：无向图 $G(V,E)$。

问：G **中是否存在** Hamilton **圈**？

定理7 HC$\in$NPC。

证 显然 HC$\in$NP。下证 HP$\propto$HC。

设 $G(V,E)$ 及 $s,t\in V(G)$ 是 HP 之输入 I，HC 的相应输入

$f(I)$为图$G'(V',E')$：

$$V'=V(G)\cup\{a\},$$
$$E'=E(G)\cup\{as,at\}.$$

显然，HP“是”当且仅当HC“是”。**证毕。**

货郎问题，代号 TS(*Traveling salesman*)：

输入：无向图$G(V,E)$，**自然数**k，$\forall e\in E$，$l(e)$。

问：是否有G**的一个生成回路**C**，使得**C**之总长不大于**k？

定理8 $TS\in NPC$。

证 不妨设$l(e)=1$，不然可把边剖分。显然$TS\in NP$，要证$HC\propto TS$。设HC的输入I为$G(V,E)$，取TS相应的输入$f(I)$为$G(V,E)$，$k=|V|$。于是I“是”当且仅当$f(I)$“是”。**证毕。**

16.3 图的色数

3色问题，代号 3C：

输入：图 $G(V,E)$。

问： $\chi(G)\leqslant 3$ **吗？**

定理9 $3C\in NPC$。

证 显然$3C\in NP$，只需证$3SAT\propto 3C$。

设3SAT之输入I为字集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n;\ \bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n\}$及句子集$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$，相应的3C之输入$f(I)$为$G(V,E)$，其中(图16.1)

$$V(G)=\{a,b\}\cup\{x_i,\bar{x}_i\mid 1\leqslant i<n\}\cup$$
$$\{w_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant 6,1\leqslant j<m\}.$$
$$E(G)=\{ab\}\cup\{ax_i,a\bar{x}_i,x_i\bar{x}_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\cup$$
$$\{w_{1j}w_{2j},w_{1j}w_{4j},w_{2j}w_{4j},w_{4j}w_{5j},w_{3j}w_{5j},$$
$$w_{3j}w_{6j},w_{5j}w_{6j},w_{6j}b\mid 1\leqslant j\leqslant m\}\cup$$
$$\{\xi_{1j}w_{1j},\xi_{2j}w_{2j},\xi_{3j}w_{3j}\mid 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$C_j=\{\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j}\}.$$

设0，1，2是我们使用的三种颜色。若I已句句饱和，我们约定当字$\xi_{kj}=T$时，顶ξ_{kj}上1色，$1\leqslant k\leqslant 3$；当$\xi_{kj}=F$时，顶ξ_{kj}上0色。由于I中每句皆饱和，所以没有

$$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j})=(0,0,0)$$

的现象。

我们把b着以0色，a着以2色，w_{6j}着以1色，$j=1,2,\cdots,m$，于是得正常上色。反之，若$f(I)$已用3种颜色正常着色，我们称a上的颜色为2号色，b上的颜色为0号色，于是可得"字"上的颜色是0色或1色，且w_{6j}不是0色，用反证法容易证明$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3})\neq(0,0,0)$。这时，我们规定3SAT的赋值法为

"字"为1色时，此字值为T；

"字"为0色时，此字值为F，

则$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j})$，$j=1,2,\cdots,m$皆饱和。**证毕。**

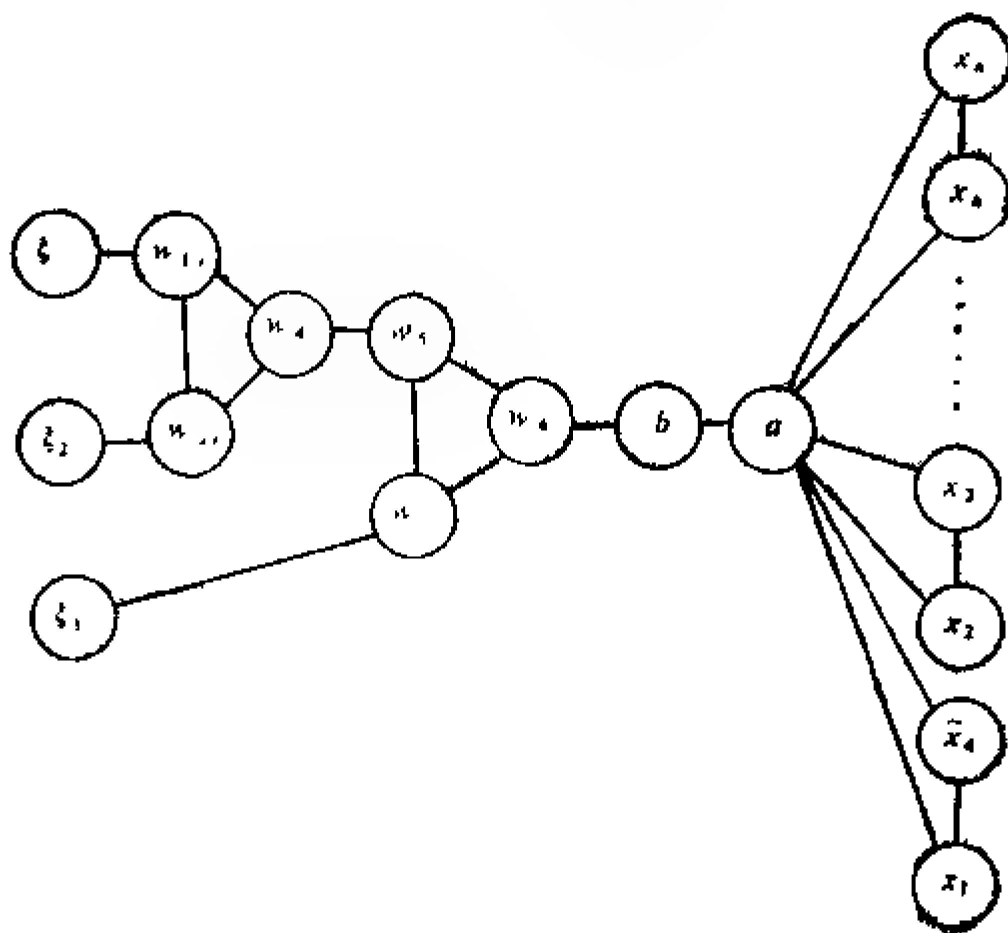


图 16.1

16.4 有向图的反馈集

最小顶反馈集问题，代号 FVS(*Feedback vertex set*)：

输入：有向图 $G(V,E)$ **，自然数** k **。**

问：是否存在 $V'\subseteq V$**，使得** $|V'|\leqslant k$**，且** $G-V'$ **中无有向圈?**

定理10 FVS∈NPC。

证 显然FVS∈NP，只需证明VC∝FVS。若I为VC之输入：$G(V,E)$及自然数k，相应的$f(I)$作为FVS之输入取为有向图$H(V,F)$及k：

$$F=\{a\to b,b\to a\mid ab\in E(G)\},$$

于是，V'是G的顶覆盖当且仅当V'是H的反馈集。**证毕。**

最小边反馈集问题，代号 FES：

输入：有向图 $G(V,E)$**，自然数** k **。**

问：是否存在 $E'\subseteq E$**，** $|E'|\leqslant k$**，且** $G-E'$ **中无有向圈?**

定理11 FES∈NPC。

证 FES显然属于NP，下证FVS∝FES。

设I是FVS之输入，I为$G(V,E)$及自然数k，相应的$f(I)$作为FES之输入取为有向图$H(W,F)$及k：

$$W=\{(v,1),(v,2)\mid v\in V(G)\},$$
$$F=\{(v,1)\to(v,2)\mid v\in V(G)\}\cup$$
$$\{(u,2)\to(v,1)\mid u\to v\in E(G)\}.$$

我们称$(v,1)\to(v,2)$型边为"内边"，$(u,2)\to(v,1)$型边为"外边"，每个与$(v,1)$关联的外边皆入边，且与$(v,1)$关联的内边只1条，它是出边；由此知，若在一个边反馈集中有一条外边$(u,2)\to(v,1)$，它可以用内边$(v,1)\to(v,2)$代替，所以我们可以假设边反馈集中的边皆为内边．在G中，与这些内边相对应的顶集$V'\subseteq V$是G的顶反馈集；反之，若V'是G的顶反馈集，则在

H中的相应内边们组成H的一个边反馈集。**证毕。**

16.5 Steiner 树

Steiner **树问题，代号** ST。

输入：连通图 $G(V,E)$，**边权** $l(e)>0$，**自然数** k，$X\subseteq V(G)$。

问： G**上是否有树** $T(W,F)$，**使得** $X\subset W\subset V$，$F\subset E(G)$，**且** $\sum_{e\in F} l(e)\leqslant k$?

这个问题用图论语言来讲，就是求一个权最小的树状子图，使此树之顶含有指定的顶子集。实际背景是挑选连通指定的几个城市的最廉价的交通（或通讯）网。

定理12 ST∈NPC。

证 ST显然属于NP。下证3XC∝ST。

设3XC的输入I为$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_t\}$，$t\neq 0$，$t\equiv 0(\mathrm{mod}3)$，U的三元素子集集团$C=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$；相应的$f(I)$作为ST之输入，我们取图$G(V,E)$及$l(e)=1$，$k=\frac{4}{3}t$，$X=\{v_0\}\cup U$，其中

$V(G)=\{v_0\}\cup C\cup U$。

$E(G)=\{v_0S_i|1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{S_iu_j|u_j\in S_i\}$。

记$v_0S_i=e_i$，$S_iu_j=f_{ij}$。

若对I回答"是"，即存在$J\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，使得$\bigcup_{i\in J}S_i=U$，且对$J$中之$i\neq j$，$S_i\cap S_j=\varnothing$，我们来证这时对$f(I)$之回答也是"是"。事实上，取$T(W,F)$为

$W=\{v_0\}\cup\{S_i|i\in J\}\cup U$,

$F=\{e_i|i\in J\}\cup\{f_{ij}|i\in J,u_j\in S_i\}$。

显然$T(W,F)$是树，且$X\subseteq W\subset V$，$F\subseteq E(G)$。又因$|J|=\frac{t}{3}$，

于是$|\{e_i \mid i\in J\}|=\frac{t}{3}$，$|\{f_{i,j} \mid i\in J,\ u_j\in S_i\}|=t$，故 $\sum\limits_{e\in F} l(e)$
$=\frac{t}{3}+t=\frac{4}{3}t$，这时$f(I)$之回答是“是”。

反之，若$f(I)$是“是”，要证I亦是“是”。

设$T(W,F)$是$f(I)$ 的一个 Steiner 树，$X\subset W$，故$u_i(i=1,2,\cdots,t)$是T上的顶；不妨设每个u_i皆叶，不然，若$d_T(u_i)>1$，则u_i与S_{j_1},S_{j_2}相邻，删去边$f_{j_1 i}$，加上边e_{j_1},e_{j_2}之一，仍然得到 Steiner 树，且总权不变。令I中的J为

$$J=\{i \mid S_i\in W\}(\neq\varnothing).$$

则此树上的S_i型顶是U的一个三元精确覆盖。**证毕。**

定理 12 的证明指出，即使是$l(e)=1$，ST 问题仍然属于 NPC。

16.6 最大断集

最大断集问题，代号 MAXC(*Maximum cut*)：

输入：无向图 $G(V,E)$，**自然数** k。

问：是否存在顶子集 $S\subset V(G)$，**使得**$|(S,\bar{S})|\geq k$？

定理13 MAXC∈NPC。

证 MAXC 显然属于NP，下证 3SAT∝MAXC。

设I是3SAT 的输入，I为：字集L与句集C，

$$L=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n\},\quad C=\{C_1,\cdots,C_m\}.$$

首先构作一个**最大权断集问题，代号** MAXWC：

MAXWC **的输入：图** $G'(V',E')$，$\forall e\in E'$，**权** $w(e)$，**自然数** k'。

问：是否有 $S'\subset V'$，**使得** $\sum\limits_{e\in(S',\bar{S}')} w(e)\geq k'$？

下证 3SAT∝MAXWC。

取$f(I)$为 MAXWC 的与I相应的输入，$G'(V',E')$，$w(e)$与k'如下：

$k' = (10m+1)n+6m$。

$V'(G') = \{v_i \mid 0\leqslant i\leqslant m\}\cup L$。

$E'(G') = \{uv \mid u\neq v$ 且 $\exists i$，使 $u,v\in A_i\}\cup\{x_j\bar{x}_j \mid 1\leqslant j\leqslant n\}$，

其中

$$A_i = \{v_0\}\cup\{v_i\}\cup C_i,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

$w(e)$取为

$$w(v_0\xi) = \sum_{i=1}^{m}|C_i\cap\{\xi\}|,\quad 当\ \xi\in L;$$

$$w(\xi'\xi'') = \sum_{i=1}^{m}|C_i\cap\{\xi'\}|\cdot|C_i\cap\{\xi''\}|,$$

当 $\xi',\xi''\in L$ 且 $\xi'\neq\xi''$；

$w(x_j\bar{x}_j) = 10m+1$；

$w(v_iu) = 1$，当 $i>0$ 且 $u\in A_i$。

若I"是"，设τ是T值之字集，令$\tau\subset\bar{S}'$，$L-\tau\subset S'$，于是$x_j\bar{x}_j\in(S',\bar{S}')$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，它们对权的总贡献是$(10m+1)n$。把$v_0$放入$S'$中。$m$个句子中的每一句至少有一个"字顶"在$\bar{S}'$中（都是饱和句，每句至少一个$T$字在$\tau$中，而$\tau\subset\bar{S}'$）。我们把$v_i$放入$S'$或$\bar{S}'$，使$A_i$中的顶"2 3分之"，$A_i$对断集提供6条边，由权之定义，$m$个团($K_5$)共对$(S',\bar{S}')$提供权数$6m$。这时，

$$\sum_{e\in(S',\bar{S}')} w(e) = k',$$

即$f(I)$的回答是"是"。

反之，若$f(I)$的回答是"是"，即存在$S'\subset V'$，使得

$$\sum_{e\in(S',\bar{S}')} w(e)\geqslant k' = (10m+1)n+6m,$$

则每条边$x_j\bar{x}_j\in(S',\bar{S}')$，故每个团$A_i$必须最大限度地再提供

6（造成 A_i 2-3 分项）。这时我们称 v_0 所在的为“假端”，另一端为“真端”。于是最多两个字（C_i 中）在假端，至少一个字在真端。我们把真端之字赋值 T，假端之字赋值 F，则 I 回答“是”。

下面把加权问题化为无权断集问题。

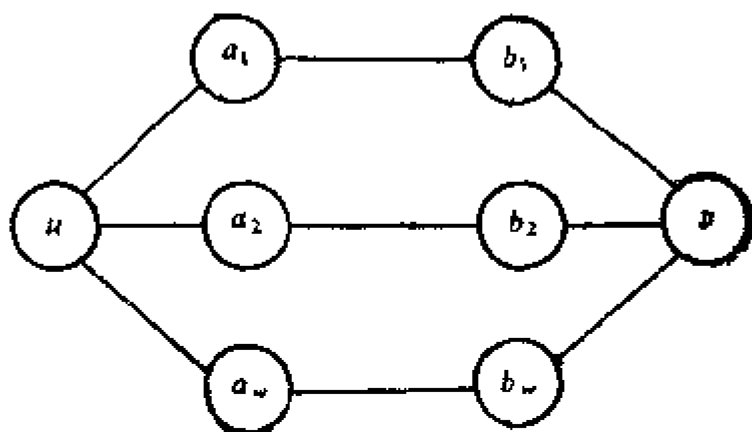


图 16.2

在 G' 中一条边 uv 之权为 $w(uv)=w(e)$，在 G 中变成如图16.2的结构，如此得到图 G。下面证明 G 中有大小至少为 $k=2[(10m+1)n+10m]+k'$ 的断集，当且仅当 G' 中有权至少为 k' 的断集。

事实上，若 G' 中权为 k' 的断集为 $(S',\bar{S}')$，考虑 G 中的断集 $(S,\bar{S})$，$S'\subset S$，$\bar{S}'\subset\bar{S}$，轨 ua_ib_iv 中，若 u,v 在 G 的断集 $(S,\bar{S})$ 的同一端，则最多有两条边在此断集中；若 u 与 v 分居于 (S,S') 之两端，则可使此轨对断集供献 3。故 G' 的每一边 e 能把 G 的断集 $(S,\bar{S})$ 的权提高 $2w(e)$，G' 的一切边，对 G 的断集提高 $2\sum_{e\in E'}w(e)$，且

$$\sum_{e\in E'}w(e)=(10m+1)n+10m.$$

若 G' 中 $(S',\bar{S}')$ 的权是 k'，令 $S'\subset S$，$\bar{S}'\subset\bar{S}$，可使

$$|(S,\bar{S})|=2[(10m+1)n+10m]+k'=k.$$

反之，若 G 的断集 $(S,\bar{S})$ 中至少有 k 条边，对 G' 的每一边 $e=uv$，若 u,v 在此断集之同一端，e 对此断集至多提供 $2w(e)$，

不妨设恰为 $2w(e)$（不然改变 S）；若 u 与 v 分居于此断集之两端，e 对此断集之供献最多为 $3w(e)$，不妨认为恰为 $3w(e)$（不然改变一下 S），故

$$|(S,\bar{S})| = 2\sum_{e\in E'} w(e) + \sum_{e\in(S',\bar{S}')} w(e) \geqslant k,$$

其中 $S' = S\cap V'$；因为 $|(S,\bar{S})|\geqslant k$，故

$$\sum_{e\in(S',\bar{S}')} w(e) \geqslant k',$$

于是 G' 有权不小于 k' 的断集。**证毕。**

16.7 图的直线排列

本节问题的实际背景是部件排列最优化的问题。

把图 $G(V,E)$ 的顶分别放在 X 轴的 $1,2,\cdots,|V|$ 处，用 $p(v)$ 表示 v 顶的坐标，且使 G 的边成为直线段，则 G 的边长之和为

$$L = \sum_{uv\in E(G)} |p(u)-p(v)|.$$

我们的目标是使 $L=\min$，可惜这个问题也是 NPC 中的一员！

图的最短线状排列问题，代号 MINLA(*Minimum linear arrangement*)。

输入：单图 $G(V,E)$，**自然数** k。

问：是否存在可逆映射

$$p:\ V\to\{1,2,\cdots,|V|\},$$

使得

$$\sum_{uv\in E(\ )} |p(u)-p(v)| \leqslant k?$$

与 MINLA 相应的，还有一个**图的最长线状排列问题，代号** MAXLA。

MAXLA **输入：单图** $G(V,E)$，**自然数** k。

问：是否存在可逆映射

$$p:\ V\to\{1,2,\cdots,|V|\},$$

使得

$$\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|\geq k?$$

定理14 MAXLA∈NPC。

证 只欠证 MAXC∝MAXLA。若 MAXC 之输入 I 为：$G'(V',E')$，自然数 k' $(|V'|=n)$，相应的 MAXLA 之输入 $f(I)$ 取为单图 $G(V,E)$ 及自然数 k：

$$V=V'\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_{n^3}\},$$
$$E=E',$$
$$k=k'n^3.$$

设 I "是"，即 G' 中存在断集 $(S',\bar{S}')$，使得 $|(S',\bar{S}')|\geq k'$，我们来安排 G 之顶，使 G 的顶在 $\{1,2,\cdots,n,n+1,\cdots,n+n^3\}$ 上，且边之总长 $\geq k$。

若 $v\in S'$，则令

$$1\leq p(v)\leq|S'|;$$

若 $v\in\bar{S}'$，则令

$$|S'|+n^3<p(v)\leq n+n^3;$$

若 $v\in\{x_1,x_2,\cdots,x_{n^3}\}$，则令

$$|S'|<p(v)\leq|S'|+n^3.$$

于是跨 n^3 个孤立顶的边之条数是 $|(S',\bar{S}')|$，每边之长 $\geq n^3$，所以

$$\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|>|(S',\bar{S}')|n^3\geq k'n^3=k.$$

即 $f(I)$ 回答"是"。

反之，若 $f(I)$ 回答"是"，即存在对 V 的安置 $p:V\to\{1,2,\cdots,n+n^3\}$，使得

$$\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|\geq k.$$

我们来建立 G' 中的一个断集 $(S',\bar{S}')$，使得 $|(S',\bar{S}')|\geq k'$。

又新顶皆孤立顶，则G'中的断集与G中新集是同一的。令

$$S_i=\{v|v\in V, p(v)\leqslant i\},\ 1\leqslant i\leqslant|V|=n+n^3$$

$(S_i,\bar{S}_i)$是断集。

令j满足

$$|(S_j,\bar{S}_j)|=\max_{1\leqslant i\leqslant n+n^3}|(S_i,\bar{S}_i)|.$$

调整G顶之位置，使V'中的顶的相对位置（左右顺序）不变，而把$x_1,\cdots,x_{n^3}$放在$S_j\cap V'$与$\bar{S}_j\cap V'$之间，则

$$\sum_{uv\in E}|p'(u)-p'(v)|\geqslant\sum_{uv\in E}|p(u)-p(v)|\geqslant k=k'n^3,$$

其中p'是调整后的"安置"（映射）。在p'的安置之下，G的边总长可以分成两部分：

（1）令$S'=S_j\cap V'$，$(S',\bar{S}')$是G'之断集，而孤立顶$x_1,\cdots,x_{n^3}$插在S'与S'之间，$(S',\bar{S}')$中边之长增加为$n^3|(S',\bar{S}')|$。

（2）把$x_1,x_2,\cdots,x_n$全卸下去，把S'与S'之间的间隙靠紧，这时边总长之上界为

$$(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+\cdots+1\cdot(n-1)=\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

于是

$$n^3|(S',S')|+\frac{n(n^2-1)}{6}\geqslant k'n^3,$$

$$|(S',\bar{S}')|+\frac{n_2-1}{6n^2}\geqslant k',$$

即

$$|(S',\bar{S}')|\geqslant k',$$

I回答"是"。**证毕。**

定理 15 MINLA$\in$NPC。

证 只需证明MAXLA$\propto$MINLA。

设MAXLA的输入为I，I是$G(V,E)$和自然数k，相应

的 MINLA 之输入 $f(I)$ 取为

$$k' = \frac{n(n^2-1)}{6} - k, \quad (n = |V|),$$

$G'(V', E')$ 为

$$V' = V,$$
$$E' = \{uv \mid u \neq v, \text{ 且 } uv \bar{\in} E(G)\}.$$

注意到完全图 K_n 之边的总长恰为 $\frac{n(n^2-1)}{6}$，于是可得知 I 与 $f(I)$ 同时回答“是”，事实上，G' 是 G 之补图，对每个安置 p，

$$\sum_{uv \in E(G)} |p(u) - p(v)| + \sum_{uv \in E(G')} |p(u) - p(v)| = \frac{n(n^2-1)}{6},$$

故

$$\sum_{uv \in E(G)} |p(u) - p(v)| \geqslant k,$$

当且仅当

$$\sum_{uv \in E(G')} |p(u) - p(v)| \leqslant k',$$

证毕.

16.8 多商品整流问题

对于一种商品运输中的最大流问题，我们已经有 2F 或 Dinic 等有效算法，但对于多种商品，既使是两种商品的整数流问题，也尚未找到有效算法，它是 NPC 的一员！

令顶 S_1, S_2 是源，t_1, t_2 是汇（坑），边容量 $c(e) > 0$ 构成有向图 $G(V, E)$ 上的一个网络，二商品流是指如下的两个流函数 f_1, f_2：

(C1) 对每个边 $e \in E(G)$，$f_1(e) \geqslant 0$，$f_2(e) \geqslant 0$，$f_1(e) + f_2(e) \leqslant c(e)$；

(C2) 对每个 $i \in \{1, 2\}$，和每个 $v \in V(G) - \{s_1, s_2, t_1, t_2\}$，

$$\sum_{e\in\alpha(v)} f_i(e) = \sum_{e\in\beta(v)} f_i(e).$$

每个流的总流量为$(i=1,2)$：

$$F_i = \sum_{e\in\alpha(t_i)} f_i(e) - \sum_{e\in\beta(t_i)} f_i(e).$$

我们设 $f_i(e)$ 与 $c(e)$ 皆非负整数。

二商品整流问题，代号D2CIF(*The two-Commodity integral flow problem in directed networks*)：

输入：有向二源二汇网络N**，非负整数** R_1，R_2 **（需求）**.

问：有无整值流函数 f_i，$(i=1,2)$，**使**$F_i\geqslant R_i$?

当 $c(e)=1$ **时，**D2CIF **称为简单** D2CIF。

定理16　简单 D2CIF∈NPC。

证　显然，简单 D2CIF∈NP。下证 SAT∝简单 D2IF。

设 SAT 之输入 I 为字集

$$L=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n\}$$

和句子集

$$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}.$$

简单 D2CIF 的相应输入 $f(I)$ 取为：

$R_1=1$，$R_2=m$，二源二汇网络N，其中N的构造为

若 p_i 是字 x_i 在句子中出现的次数，q_i 是 $\bar{x}_i$ 在句子中出现的次数，则对每个 x_i 我们构作如图 16.3 所示的结构。

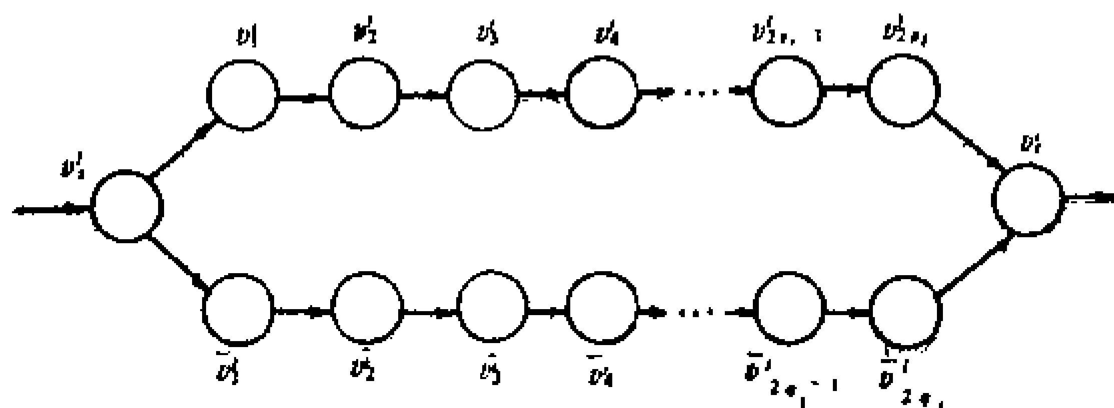


图 16.3

把图16.3的结构连成一串，以 v_i^j 为尾，以v_i^{j+1} 为头有一条有向边；以 S_1 为尾，以 v_i^1 为头有一条有向边；以 v_i^n 为尾，以 t_1 为头有一有向边；以 S_2 为尾，以 v_i^j 和 $\bar{v}_i^j$ 为头有有向边，这里 j 是奇数；$C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是另一些顶，每个 C_i 为尾，$i=1,2,\cdots,m$，t_2 为头，有一条有向边；若 $x_i(\bar{x}_i)$ 第 j 次出现时，则以 $v_{2,i}^j(\bar{v}_{2,i}^j)$为尾，以 C_t 为头有一有向边，其中 C_t 是 $x_i(\bar{x}_i)$出现的句子。

由($C2$)，第一种商品必然由 S_1 出发从左到右地要么经过图16.3的上轨，要么经过下轨流入 t_1。

设 $f(I)$ “是”，我们取赋值法为：仅当f_1 流过第 i 个图16.3式的结构下轨时，$x_i=T$。于是对SAT的输入 I，回答“是”。

反之，若有赋值法，使 I 中句句饱和，若 $x_i=T$ 时，我们令第一种商品流过图16.3的下轨；若 $x_i=F$，我们令第一种商品流过图16.3的上轨；令 ξ 是 C_k 中的“真”字，若 $\xi=x_i$，则图16.3的上轨不通过第一种商品，而使用它从 S_2 到 C_k 流过第二种商品的一个单位；若 $\xi=\bar{x}_i$，用下轨从 S_2 到 C_k 流过第二种商品一个单位，于是可使 $F_1=1$，$F_2=m$，即 $f(I)$亦“是”。证毕。

本章我们介绍了图论中16个著名的问题，其中货郎问题、图的线排列问题以及二商品流问题等，显然有极强烈的实际背景，是急待解决的应用实例。我们已证明它们属于NPC，于是要搞出有效算法精确地解决它们就十分困难，甚至这些问题本身不存在有效算法，进而NPC中的全体问题都无有效算法。

当前对于NPC中的问题，我们常常把追求问题的有效算法的努力转移到设计良好的近似算法上去，例如对于货郎问题已有改良圈近似算法。

Garey M R和Johnson D S在《*Ccmputers and Intra-*

ctability》一书中给出了一部分NPC问题的一个清单，有兴趣的读者可以去查阅。

习　　题

1．不用Cook定理证明IND∝CLIQUE。

2．证明求最小独立集但它也是顶覆盖可在多项式时间内解决。

3．叙述一个判定问题型的最小支配集问题，且证明它是NPC的。

4．把无向图中的货郎问题（回路上的顶可以通过不止一次）叙述成判定问题，且证明它是NPC的。

5．证明：存在多项式算法求出一个回路C，其长满足$l(C)\leqslant 2l(T)$，其中$l(T)$是G的最小生成树T之长；且若每边长皆正数，则这种回路满足$l(C)>l(T)$。

6．证明对每个$k\geqslant 3$，图的k正常着色问题（一般）是NPC的。

7．下述问题叫做图的团划分问题：

输入：图$G(V,E)$，自然数k。

问：能否把V划分成k个子集$V_1,V_2,\cdots,V_k$，使得$G[V_i]$是团？

证明：此问题是NPC的。

8．考虑下面关于有向图的问题：

输入：强连通有向图$G(V,E)$，自然数k。

问：是否有边子集E'，使得$|E'|\leqslant k$？且$G'(V,E')$是强连通的？

证明：该问题是NPC的。

9．证明下列最长轨问题是NPC的：

输入：图$G(V,E)$，二顶点s，t，正整数k。

问：是否存在从s到t长度不少于k的轨？

10。证明对于2分图,无向Hamilton轨问题也是NPC的。

11。证明即使s, t不指定,无向Hamilton轨问题也是NPC的。

12。下面是限制次数的生成树问题：

输入：图$G(V,E)$，自然数k。

问：G中是否有生成树，对每个顶，$d_T(v) \leqslant k$?

证明：即使$k \geqslant 2$是固定的，而不是输入的一部分，该问题也是NPC的。

13。考虑下面的网络通讯问题：$G(V, E)$是一个图,$v_0 \in V(G)$称为中心，每顶$v \in V - \{v_0\}$有一个需求$r(v) \geqslant 0$，每边e上有一个容量$c(e) > 0$和一个费用$k(e) \geqslant 0$，找一个满足下列条件的最小费用生成树T：若$U(e)$是一些顶之集合，使得从v_0经e到达这些顶，则$\sum_{v \in U(e)} r(v) \leqslant c(e)$；树的费用为$\sum_{e \in E(T)} k(e)$。

叙述一个相应的判定问题，且证明它是NPC的。

14。有向Steiner树问题：

输入：有向图$G(V,E)$，顶子集X，一顶$r \in X$，自然数k。

问：G中是否有根在r的外向树$T(W,F)$，使得$X \subseteq W \subseteq V$，且$|F| \leqslant k$?

证明：此问题是NPC的。

15。在二分图$G(X,Y,E)$中，X集合是连通的，Steiner树问题仍是NPC的。

16。下列问题称为最少撤边二分子图问题，代号MINEDB (*Minimum edge-deletion bipartite subgraph*)：

输入：图$G(V,E)$，自然数k。

问：是否存在边子集$E' \subset E$,使得$G(V, E-E')$是二分图，且$|E'| \leqslant k$?

证明：MINEDB∈NPC。

17。下列问题称为等分最小断集问题，代号MINCES (*Minimum cut into equal-sized*)：

输入：图$G(V,E)$，二顶s，t，自然数k。

问：是否存在V的划分$S,\bar{S}$，使得$|S|=|\bar{S}|$，$s\in S$，$t\in \bar{S}$，且

$$|\{uv|u\in S,v\in \bar{S}\}|\leqslant k?$$

证明：MINCES∈NPC。

18．证明网络中的最大流2F算法中能否只用k条可增载轨得出的问题是NPC的。

19．成捆整流问题，代号IFWB(*Integral flow with bundles*)：

在最大流问题中，"捆儿"是指边子集$B_1,B_2,\cdots,B_k$，分别具有捆容量$C_1,C_2,\cdots,C_k$；流f要满足对每个捆B_i，$i=1,2,\cdots,k$，$\sum\limits_{e\in B_i} f(e)\leqslant C_i$，且对每个顶$v\in V-\{s,t\}$，流入与流出相等，问是否存在满足需求$R$之流$f$？

证明：IFWB∈NPC。

17 拟阵与图

17.1 定义与例

拟阵在计算机科学及系统理论中的应用日益增多。本章介绍它的一些性质及其与图论的联系。

在线性代数当中，有如下的**替换定理**：V是一个线性空间，B_1与B_2是V的两组基，那么对B_1中任一向量e，可找到B_2中一个向量f，使得$(B_1-\{e\})\cup\{f\}$也是V的一组基。

在图论中亦有类似的事实。

定理 1 **G是连通图，T_1与T_2分别是G的生成树，$\forall e\in E(T_1)$，则$\exists f\in E(T_2)$，$\ni(T_1-e)+f$是G的生成树。**

证 若$e\in E(T_2)$，则定理自然成立。若$e\notin E(T_2)$，则e的端点非一次，且$E(T_2)-E(T_1)\neq\varnothing$。记$T_2-T_1=E(T_2)-E(T_1)$，把$T_2-T_1$中的边分别添入$T_1$而得的各个圈中必有一个圈$C$含$e$；否则，分别删去所得各圈中不属于$T_2$的的边得$T_2$，但$e\notin E(T_2)$，未被删去，这是不可能的。显然，$C$上必有一边$f\in E(T_2)$，但$f\notin E(T_1)$，于是，从$C$上删除$e$后得$T_1-e+f$仍为$G$的生成树。**证毕**。

我们把定理1的事实抽象成集合的语言，引出拟阵的概念。

定义 1 **$(E,\mathscr{B})$为有序偶，其中E是非空有限集合，$\mathscr{B}$是E的一些子集组成的非空族，称$\mathscr{B}$中每个子集为基，且满足**

$(\mathscr{B}_1)$ 每个基不是别的每的真子集，

$(\mathscr{B}_2)$ 若B_1与B_2是基，$\forall e\in B_1$，则$\exists f\in B_2$，$\ni(B_1-\{e_1\})\cup\{f\}$也是基。

这时我们称$(E,\mathscr{B})$是一个拟阵，记成$M=(E,\mathscr{B})$。

由（$\mathscr{B}_2$）易见，M中任二个基B_1，B_2，必有$|B_1|=|B_2|$，我们称这个数字为M的**秩**。

若$G(V, E)$是一个图，由G的各个生成林的边集为基则构成一个拟阵$M(G)=(E(G), \mathscr{B})$。通常称$M(G)$为图G的**圈拟阵**（*Circuit matroid*）。

若E是向量空间中一个非空有限向量集，$L(E)$是由E线性生成的子空间，则E的任何一个线性无关子集，当它能线性生成$L(E)$时，便作为一个基，这样的基之全体记成$\mathscr{B}$，于是$(E, \mathscr{B})$也是一个拟阵，称为**向量拟阵**。

在拟阵中，E的一个子集称为**无关的**，是指它是拟阵某个基的子集。基即为**极大无关集**。任何一个拟阵，都可由它的极大无关集唯一决定。对于向量拟阵，E的一个子集为无关集的充要条件是，当把E的这个子集的元素视为向量空间的向量时，它们是线性无关的。与此相仿地，若$G(V, E)$是图，则$M(G)$的无关集便是G的不含圈的边集，即导出G含有的林的边集。

一个拟阵可以用它的无关集来描绘，所以可以用无关集来叙述拟阵的定义。

定义 2　一个拟阵M是一个有序偶（E，$\mathscr{I}$），其中E是非空有限集，$\mathscr{I}$是E的一些子集的非空族，其中每个子集称为无关集，无关集满足

（$\mathscr{I}$1）无关集的子集是无关集；

（$\mathscr{I}$2）I与J是两个无关集，且$|J|>|I|$，则在J中有一个元素e，它不在I中而能使$I\cup\{e\}$是无关集。

注意，用此定义时，可把一个基定义为一个极大无关集；反复使用（$\mathscr{I}$2）于任一无关集，便可把它扩充为一个基。

容易证明，在定义1中，规定每个基的子集为无关集，则E连同它的全体无关集自动地满足定义2。反之，在定义2中，按其后“注意”引入基时，E连同全部基也满足定义1，故定义1与定义2是等价的。

若$M=(E,\mathscr{I})$是一个拟阵，E的一个子集不是无关集时，称之为**相关集**；极小的相关集称为**圈**，对于$M(G)$，它的每个圈正是图G中的圈。

若$M=(E,\mathscr{I})$，$A\subset E$，则A所含的最大无关集的阶数称为A的**秩**，记为$\rho(A)$。前面说的拟阵M的秩，用**秩函数**表示即为$\rho(E)$。A为无关集的充要条件是$\rho(A)=|A|$。

定义 3　一个拟阵M是一个有序偶(E,ρ)，其中E是非空有限集合，ρ是定义在E的幂集合上的整值函数，且满足

($\rho1$)　$0\leqslant\rho(A)\leqslant|A|$**对$E$的每个子集$A$成立；**

($\rho2$)　**若**$A\subset B\subset E$，**则**$\rho(A)\leqslant\rho(B)$；

($\rho3$)　**对任何**$A,B\subseteq E$，$\rho(A\cup B)+\rho(A\cap B)\leqslant\rho(A)+\rho(B)$。

定理 2　定义 3 与定义 2 等价。

证　设$M=(E,\mathscr{I})$是定义 2 中的拟阵，规定$\rho(A)$为含于A的最大无关集中元素个数，则($\rho1$)与($\rho2$)成立。下证($\rho3$)亦成立。设X是$A\cap B$的极大无关子集，由于X是A的无关子集，它能扩充为A的一个极大无关子集Y，再扩充为$A\cup B$的一个极大无关子集Z，因为$X\cup(Z-Y)$是B的无关子集，由($\rho2$)，$\rho(B)\geqslant\rho(X\cup(Z-Y))=|X|+|Z|-|Y|=\rho(A\cap B)+\rho(A\cup B)-\rho(A)$，故($\rho3$)成立。

反之，设$M=(E,\rho)$是定义 3 中的拟阵，规定E的子集A是无关集的充要条件是$\rho(A)=|A|$。若$A_1\neq\varnothing$，$A_1\subset A$，当A为无关集时，$A=A_1\cup(A-A_1)$，若$\rho(A_1)<|A_1|$，因$\rho(A-A_1)\leqslant|A-A_1|=|A|-|A_1|$，故$|A|=\rho(A)=\rho(A_1\cup(A-A_1))=\rho(A_1\cup(A-A_1))+\rho(A_1\cap(A-A_1))\leqslant\rho(A_1)+\rho(A-A_1)<|A_1|+|A|-|A_1|=|A|$，矛盾。故$\rho(A_1)=|A_1|$，$A_1$是无关集，即($\mathscr{I}1$)成立。下证($\mathscr{I}2$)成立。设$I$与$J$是无关集且$|J|>|I|$。用反证法，设$\rho(I)=k$，并设对每个属于$J$而不属于$I$的元素$e$，都有$\rho(I\cup\{e\})=k$，那么，若$e$与$f$都属于$J$而不属于$I$，则由($\rho3$)知

$$\rho(I\cup\{e\}\cup\{f\})\leqslant\rho(I\cup\{e\})+\rho(I\cup\{f\})-\rho(I)=k,$$

由此得 $\rho(I\cup\{e\}\cup\{f\})=k$。继续这种程序，每次添入 J 的一个新元素，由于每一步得到的集合秩皆为 k，最后得 $\rho(I\cup J)=k$。由 ($\rho2$) 知 $\rho(J)\leqslant k$，与 $\rho(J)=|J|>|I|=\rho(I)=k$ 矛盾。所以在 J 中存在一个不属于 I 的元素 f，使得 $\rho(I\cup\{f\})=k+1=|I|+1$。**证毕。**

所谓拟阵 $M=(E,\rho)$ 的**环** (loop)，是指 E 中满足 $\rho(\{e\})=0$ 的元素 e，M 的一对**平行元素**是指 E 中一对元素 $\{e,f\}$，e，f 皆非环，但 $\rho(\{e,f\})=1$。在图的圈拟阵 $M(G)$ 中，这里说的环与平行元素分别是图的环与重边。

下面介绍几种重要的特殊拟阵。

(1) **平凡拟阵** 只有空集这一个无关集的拟阵，它是一个秩为0的拟阵。

(2) **离散拟阵** E 的每个子集皆无关集的拟阵。

离散拟阵只有一个基，它是 E 本身；$\forall A\subseteq E,\rho(A)=|A|$。

(3) **均匀拟阵** 全部基即为 E 的全体 k 元子集时，称拟阵为 E 上的 **k-均匀拟阵**。

平凡拟阵与离散拟阵皆均匀拟阵的特例。

(4) **同构拟阵** $M_1=(E_1,\mathscr{I}_1)$，$M_2=(E_2,\mathscr{I}_2)$ 称为**同构拟阵**，指存在可逆映射 ψ：$E_1\to E_2$，使 E_1 中的元素组成的子集在 M_1 中为无关集，当且仅当它在 E_2 中的象是 M_2 中的无关集。

(5) **可图拟阵** 若拟阵 M 与一个图 G 的圈拟阵同构，则称拟阵 M 为可图拟阵。

例如在 $E=\{1,2,3\}$ 上，以 ϕ，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$ 为无关集的拟阵 M 与图17.1中的图 G 之圈拟阵 $M(G)$ 同构，此拟阵 M 为可图拟阵。

但并非每个拟阵都是可图的，例如4元素集合上2-均匀拟阵不可图.

（6）**图的割集拟阵与补可图拟阵**

设$G(V, E)$是一个图，拟阵$(E, \mathscr{I})$中，$\mathscr{I}$是E的如下子集族，其成员不以G的任何割集为子集，记之为$M^*(G)$，称为图G的割集拟阵。若一个拟阵与某个图G的割集拟阵同构，则称此拟阵为补可图拟阵。

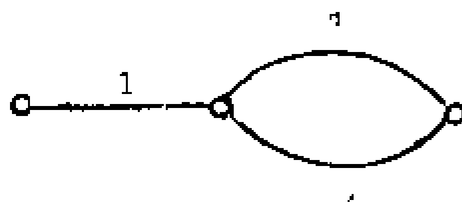


图 17.1

下面验证割集拟阵满足拟阵定义。$(\mathscr{I}1)$自然成立。下面证明$(\mathscr{I}2)$亦成立。设I与J都是$\mathscr{I}$的子集，且$|I|<|J|$，$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}=I\cap J$，$I=\{e_1,\cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_p\}$，$J=\{e_1, \cdots, e_k; e_{p+1}, \cdots, e_q\}$，于是由$|I|<|J|$知$q-p>p-k$。若$I\cup\{e_i\}(i=p+1, \cdots, q)$皆不属于$\mathscr{I}$，那么这$q-p$个集合都以$G$的割集为子集。由于$J$是无关集，故$I\cup\{e_i\}$所含的$G$之割集不会是$\{e_1, \cdots, e_k, e_i\}$的子集，它必含有$\{e_{k+1}, e_p\}$中的某些边，而$I\cup\{e_j\}(j\neq i, i, j$取$p+1, \cdots, q$中的值）中所含的$G$的割集与$I\cup\{e_i\}$所含者不同，即它所含的$\{e_{k+1}, \cdots, e_p\}$中的边与$I\cup\{e_i\}$所含者不同，但$q-p>p-k$，矛盾。故必有$e\in J$，$e\notin I$，使得$I\cup\{e\}$仍为无关集。

（7）**可平面拟阵**　既是可图的又是补可图的拟阵叫做可平面拟阵。

（8）**可表示拟阵**

M是集合E上的拟阵，称M在域F上是可表示的，指存在F上的一个向量空间V以及映射φ：$E\to V$，它具有以下性质：$A\subseteq E$在M中为无关的，即φ在A上是一一对应且$\varphi(A)$在V中线性无关。当F取0-1二元域时，称M为**二分拟阵**。在每个域上皆可表示的拟阵叫做**正则拟阵**；有的拟阵在任何域上皆不是可表示的。

图$G(V, E)$的圈拟阵$M(G)$是一个二分拟阵。事实上，

在关联阵中每条边对应的列向量为0-1向量，一些边组成一个圈时，对应的向量之和为零向量（在0-1二元域中计算）。

（9）二部拟阵与Euler拟阵

一个拟阵的每个圈都由偶数个元素组成，则称它为二部拟阵。若E是一些无公共元素的圈的并，则在集合E上的拟阵称为Euler拟阵。

（10）子拟阵

M是定义在集合E上的拟阵，$A\subseteq E$，M在A上的**限制**记成$M\times A$，是指如下拟阵，它的圈恰好是M含于A的圈。M到A的**收缩**记成$M\cdot A$，是指如下的拟阵，它的圈是集族$\{C_i\cap A\}$的极小元，其中C_i是M的圈。它们对应于在一个图中删去某些边及把某些边收缩掉。

某拟阵M经有限次限制与收缩得到的拟阵叫做M的子拟阵。

17.2 拟阵与图论

定义 4 **若$M=(E,\ \rho)$是用秩函数定义的一个拟阵，M的对偶拟阵M^*定义如下：$M^*=(E,\ \rho^*)$，对$A\subseteq E$，ρ^*满足**

$$\rho^*(A)=|A|+\rho(E-A)-\rho(E).$$

定理 3 $M^*=(E,\ \rho^*)$是E上的一个拟阵。

证 我们对ρ^*验证定义3中的（$\rho1$），（$\rho2$），（$\rho3$）三个条件。设$A\subseteq B$，由ρ^*的表达式得

$\rho^*(B)-\rho^*(A)=|B|-|A|+\rho(E-B)-\rho(E-A)$，

令$B_1=E-B$，$A_1=E-A$，$B_1\subseteq A_1$，$\rho(A_1)\leqslant\rho(A_1-B_1)+\rho(B_1)$或$\rho(B_1)-\rho(A_1)\geqslant-\rho(A_1-B_1)=-\rho(B-A)$，代回原式得$\rho^*(B)-\rho^*(A)=|B|-|A|+\rho(B_1)-\rho(A_1)\geqslant|B|-|A|-\rho(B-A)$，由（$\rho1$）知此式不小于0，从而$A\subseteq B\subseteq E$时，$\rho^*(B)\geqslant\rho^*(A)$，即$\rho^*$满足（$\rho2$）。

为了验证（$\rho1$），首先易知$\rho^*(A)\leqslant|A|$，又由（$\rho3$），$\rho(E)$

$+\rho(\phi)\leqslant\rho(A)+\rho(E-A)$，故 $\rho(E)-\rho(E-A)\leqslant\rho(A)\leqslant|A|$，因而 $\rho^*(A)\geqslant 0$。

最后验证 ρ^* 满足（$\rho3$），对任何 A，$B\subseteq E$，

$$\begin{aligned}\rho^*(A\cup B)+\rho^*(A\cap B) &= |A\cup B|+|A\cap B| \\ &\quad +\rho(E-(A\cup B))+\rho(E-(A\cap B))-2\rho(E) \\ &= |A|+|B|+\rho((E-A)\cap(E-B)) \\ &\quad +\rho((E-A)\cup(E-B))-2\rho(E)\leqslant|A|+|B| \\ &\quad +\rho(E-A)+\rho(E-B)-2\rho(E) \\ &= \rho^*(A)+\rho^*(B).\end{aligned}$$

证毕。

定理 4 M^***的基是**M**的基的补集。**

证 若 B^* 是M^* 的基，往证 E-B^* 是M 的基。由于 B^* 在 M^* 内是无关的，$|B^*|=\rho^*(B^*)$，因此 $\rho(E-B^*)=\rho(E)$，于是只剩下要证 $E-B^*$ 在M中是无关的。由于 B^* 是M^* 的基，故 $\rho^*(B^*)=\rho^*(E)$，于是$\rho^*(E)=|E|+\rho(\phi)-\rho(E)=|E|-\rho(E)$，故$|B^*|+\rho(E-B^*)-\rho(E)=|E|-\rho(E)$，$\rho(E-B^*)=|E-B^*|$，**证毕。**

每个拟阵都有唯一的对偶，而且 $(M^*)^*=M$。

定理 5 G**是一个图，则**$M^*(G)=(M(G))^*$。

证 由于$M^*(G)$ 的圈都是G的割集，我们必须验证 C^* 是 $(M(G))^*$ 的圈的充要条件是：C^* 是G的割集。若 C^* 是G的割集，而 C^* 在 $(M(G))^*$ 中是无关集，那么 C^* 可以扩充为 $(M(G))^*$ 的一个基 B^*。由此得 $C^*\cap(E-B^*)=\phi$，而任何割集与生成林有公共边，这里 $E-B^*$ 正是G的一个生成林，由此得矛盾。于是 C^* 是 $(M(G))^*$ 中的相关集，它含有 $(M(G))^*$ 的一个圈。

反之，若 D^* 是 $(M(G))^*$ 的一个圈，则 D^* 不含于$(M(G))^*$ 的任一基内。由此，D^* 与$M(G)$ 的每个基都有公共边，即 D^* 与G的每个生成林都有公共边，所以D^* 含有 G 的一个割集。

证毕。

若拟阵M的一些元素组成的集合形成M^*的一个圈，则称这个集合形成M的一个**补圈**。由定理5知，图G的圈拟阵的补圈恰好是G的割集。还可仿此定义M的一个**补基**为M^*的一个基，以及相应的**补秩**、**补无关集**等等。我们还可指出，拟阵M是"补可图的"的充要条件是M^*是可图的。引入"补概念"，我们便可以集中注意拟阵M，不必分心照顾M^*。为说明这一点，我们证明下列结果在拟阵方面的类似结果。

命题 1　**F是图G的生成林，则：（1）G的每个割集都与F有一条公共边；（2）G的每个圈都与F关于G的补图（从G中圈去F各边得的图）有一条公共边。**

以上结果在拟阵中的类似结果有

定理 6　**拟阵的补圈与基相交。**

证　设C^*是拟阵M的补圈，B是M的基，且$C^*\cap B=\phi$，即C^*含于$E-B$内，作为M^*的圈，C^*含于M^*的一个基内，矛盾。**证毕。**

推论 1　**拟阵的圈与补基相交。**

我们看到，用拟阵的观点，上述命题1的（1）与（2）实际上是一个结果的两种对偶形式，在拟阵论中只需证明一个结果并用一下对偶性即可。

作为拟阵论引入简化的进一步的例子，我们考虑下面的

命题 2（1）**若图G的两个不同的圈都含有同一条边e，则G有一个不含e的圈；（2）把圈改成割集，（1）仍成立。**

在拟阵论中，若我们证明了关于圈的结果之后，再把它用于$M^*(G)$，立即得出关于割集的结果；反之，亦可利用对偶性，由关于割集的结果归结出关于圈的结果。

下面讨论有关平面图对偶图的问题，在第5章中，我们给出过平面图的几何对偶图的定义，下面引入图的抽象对偶的概念。

定义 5　**图G的抽象对偶，记成G^*，是指这样一个图，G**

与 G^* 的边之间一一对应，使得 G 中一个边子集构成 G 的一个圈的充要条件是，此边子集对应的 G^* 中之边子集形成 G^* 的一个割集。图17.2画出一个图 G 及其抽象对偶 G^*。

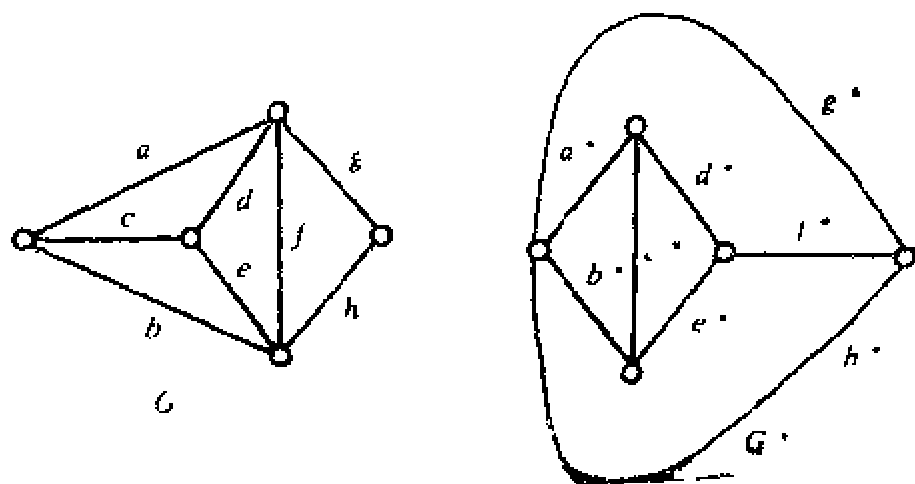


图 17.2

下面对可平面图而言，其几何对偶与抽象对偶，如何可作为拟阵中对偶性的推论而引入。

定理 7 **G^* 是 G 图的抽象对偶，则 $M(G^*)$ 与 $(M(G))^*$ 同构。**

证 由于 G^* 是 G 的抽象对偶，$E(G)$ 与 $E(G^*)$ 之间有一一对应，使 G 中的圈对应于 G^* 中的割集，反之亦然。由此得 $M(G)$ 的圈对应于 $M(G^*)$ 的补圈，由定理 5，$M(G^*)$ 与 $(M(G))^*$ 同构。**证毕。**

推论 2 **G^* 是连通平面图 G 的几何对偶，则 $M(G^*)$ 与 $(M(G))^*$ 同构。**

证 先证 G 的一个圈对应于 G^* 的一个割集，反之，G^* 中任一割集对应于 G 中一个圈。设 C 是 G 中一个圈，则 C 包围了 G 的一个或几个有界区域，故其内含 G^* 的非空顶点子集。由此，G^* 与 C 交叉的那些边，形成 G^* 的割集；反之，把 G^* 的割集删除后，得到含两个连通片的图，其中一个连通片的顶点集不含与 G 的无界区域对应的顶点时，围了这个顶点集所对应的 G 的各区域的外围边，即是此割集所对应的 G 中的圈，由定理 7 知推论 2 成

立。证毕。

一个平面图可能有不止一个互不同构的对偶，而拟阵的对偶是唯一的。可以验证，若G^*与G'是G的两个对偶，则G^*与G'的圈拟阵是同构的拟阵。

习　　题

1. $E=\{a,b,c,d,e\}$，找出E上满足下列条件的拟阵：（1）E有唯一的基；（2）空集是唯一的基；（3）E的恰含三个元素的子集的全体组成基集合；对每个拟阵，写出它的无关集、圈（如果有）以及秩函数。

2. G_1，G_2如图17.3所示，写出圈拟阵$M(G_1)$与$M(G_2)$的基、圈以及无关集。

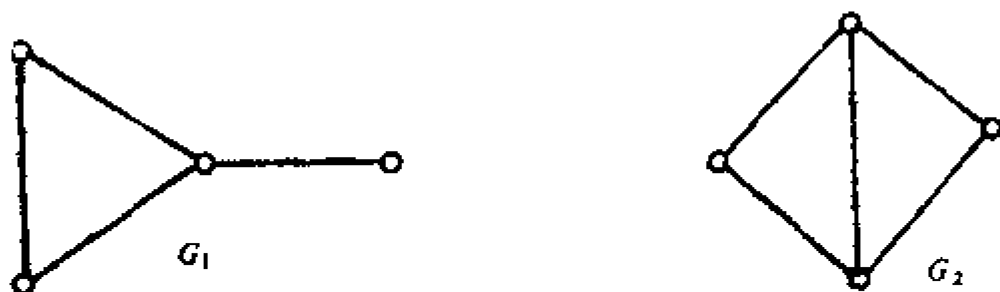


图 17.3

3. M是$E=\{a,b,c,d\}$上的拟阵，全部基为$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{b,c\}$，$\{b,d\}$，$\{c,d\}$，写出M的全部圈，并引出结论：M不是任何图G的圈拟阵。

4. 利用性质（$\mathscr{B}1$，（$\mathscr{B}2$）证明：（1）集合E上的拟阵任何两个基含同样多的元素；（2）$A\subset E$，则A的任何两个极大无关子集内含有同样多个元素。

5. 怎样把图的基本圈集的定义推广到拟阵去？

6. 证明：拟阵M也可定义为一个有序偶$(E,\mathscr{C})$，其中E为非空有限集，$\mathscr{C}$是E的非空子集的一个族（其中每个非空子集称为圈），它满足：（1）每个圈都不是圈的真子集；（2）C_1，C_2是含边e的两个圈，则$C_1\cup C_2$中有一个圈，它不含e。

7. $E=\{a,b\}$，若同构的拟阵不加区别，则E上恰有四个拟阵，试把它们的基、无关集和圈写出来。

8. $E=\{a,b,c\}$，若同构的拟阵不加区别，则E上恰有 8 个拟阵，写出它们的基、无关集与圈。

9. 证明可图拟阵$M(K_5)$与$M(K_{3,3})$都不是补可图的。

10. M是集合E上的拟阵，且$A\subseteq B\subseteq E$，则(1) $(M\times B)\times A=M\times A$；(2) $(M\cdot B)\cdot A=M\cdot A$。

11. 若拟阵M满足下列性质中任一性质，则M的任何子拟阵也满足同一性质：(1) 可图的；(2) 补可图的；(3) 二分的；(4) 正则的。

12. (1) 证明离散拟阵的对偶是平凡拟阵；(2) n元素集合上的k-均匀拟阵的对偶是什么？

13. 求第 8 题中的 8 个拟阵的对偶。

14. 下列拟阵的补圈与补基是什么？

(1) 九元素集上的 3-均匀拟阵；(2) 图 17.3 中G_1与G_2的圈拟阵。

习题答案或提示

第1章

2　$e(K_\nu)=\binom{\nu}{2}$，故有 $e(G)\leqslant\binom{\nu}{2}$。

3 (2)　n 个顶的轨与 n 个顶的星状图边数亦同，但不同构。

5　$N-2$。

6　设 S_1 与 S_2 是任意划分成的两个集合，以{1, 2, 3, 4, 5}为顶集作K_5，当且仅当顶 u 与 v 满足 $|u-v|\in S_j\,(j=1,2)$ 时，把边 uv 染成 j 色．若 123451 与 135241 分别是 1 色与 2 色的同色五边形，则 1 与 4 在同一个集合，2 与 3 在另一集合，这时命题成立．不然，会出现同色三角形 Δuvw，设 $x=u-v>0$，$y=v-w$，$z=u-w$，则 x，y，z 在同一集合，且 $x+y=z$.

7　以人为顶点，两人为朋友时，相应的两顶之间连一条边，若任二人朋友数相异，依题意，$\Delta\geqslant\nu-1$（ν 是人数），而 $\Delta=\nu-1$ 时，必有 $\delta\geqslant1$，从而 $\Delta-\delta+1<\nu$，这与各顶次数相异矛盾，而 $\Delta>\nu-1$ 亦不可能．

8　以人为顶，相识时，之间连一条边．

10　必要性不足道．由 θ 定义 ϕ：$E(G)\to E(H)$，使 $uv\in E(G)$ 和 $\theta(u)\theta(v)\in E(H)$ 对应，于是 ϕ 可逆，且 $\psi_G(e)=uv$ 的充要条件是 $\psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$．

11　充分性显然成立；由 $e(K_\nu)=\binom{\nu}{2}$，从而不是完全图且 $e=\binom{\nu}{2}$ 的图中一定有重边或环，与 G 是单图矛盾．

12(b)　设 G 的顶划分为 X，Y，$|X|=\nu-m$，$|Y|=m$，则

$$\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(K_{\nu-m,m})=(\nu-m)m\leqslant\frac{\nu^2}{4}.$$

14　总盘数 $=\varepsilon(K_n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

16　若图中无圈，考虑其最长轨，此轨两个端点必为一次顶。

17　以运动队为顶，两队赛一局，则在二队之间连一边。再用 $2\varepsilon(G)=\sum_{v\in V}d(v)$ 来证明，这里 $\varepsilon(G)=n+1$.

18　令 $G_1=G[A]$，把恰有一个端点在A内的 k 条边之另一端点重合成一个端点 v 。把这 k 条边与顶 v 并入G_1 得图 G_2，再根据 G_2 中奇次顶之个数是偶数即可得证.

19　以 $2n$ 个点为顶，只要两个顶在同一个圆内，则此二顶相邻，得到一个图G. 我们只需再证明G是连通的，结合每个顶次数不小于 n .

20　先证此图必有一个圈C ,用最长轨方法证.若 $\exists v\in V(G)$，但 $v\bar{\in}C$，则C上有三次以上的顶.

21　两个三角形.

22　2个

23　k 维立方体与 0 1k 维向量一一对应，而后者恰为 2^k个。在上述 k 维向量中，固定 $k-1$ 个坐标后，在 k 维立方体中，对应两个顶，这二顶相邻，故 $\varepsilon=C_k^{k-1}2^{k-1}=k2^{k-1}$。按每个顶点坐标和的奇偶性，把顶划分成两个子集，即可验证其为二分图。

24　K_n^c 是无边图，$K_{m,n}^c$ 是 K_m 与 K_n 的并.

25　$\varepsilon(G)+\varepsilon(G^c)=\varepsilon(K_\nu)=\dfrac{1}{2}\nu(\nu-1)$，又 $G\cong G^c$，故 $\varepsilon(G)=\dfrac{1}{4}\nu(\nu-1)$，而 ν 与 $\nu-1$ 中有一奇数，从而 $\nu\equiv0$，1 mod4 .

26　这种图$\nu=\varepsilon=5$。共有两个，一个是五边形，另一个是五边形删去一条边后加一对角形使其含三角形。

30　$K_{1,k+1}$。

31　设G中n个顶的导出子图有m条边。v_i与v_j是G中任意两个顶、在$G-v_i$中n个顶的导出子图共$\binom{\nu-1}{n}$个，在$G-v_i$中任一边uv在这$\binom{\nu-1}{n}$个n顶导出子图中取到的次数为$G-\{v_i,u,v\}$中取$n-2$个顶点的导出子图的个数$\binom{\nu-3}{n-2}$。于是有

$$\varepsilon(G)-d(v_i)=\varepsilon(G-v_i)=m\binom{\nu-1}{n}\Big/\binom{\nu-3}{n-2}, \qquad (1)$$

$$\varepsilon(G)-d(v_j)=\varepsilon(G-v_j)=m\binom{\nu-1}{n}\Big/\binom{\nu-3}{n-2}, \qquad (2)$$

$$\varepsilon(G)-d(v_i)-d(v_j)+a_{ij}=\varepsilon(G-\{v_i,v_j\})$$

$$=m\binom{\nu-2}{n}\Big/\binom{\nu-4}{n-2}, \qquad (3)$$

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_iv_j\in E(G),\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

(3)－(1)－(2)得a_{ij}与i，j的取法无关，于是

$$G\cong\begin{cases}K_\nu^c, & a_{ij}=0;\\ K_\nu, & a_{ij}=1.\end{cases}$$

32　由$\nu\delta\leqslant\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon\leqslant\nu\Delta$即得证。

33　$k|X|=k|Y|=\varepsilon$，故$|X|=|Y|$。

34　必要性显然成立。对于充分性：若$d_i=2k$，则在v_i处作k个环；若$d_i=2l+1$，则在顶v_i处作l个环，d_i为奇数的顶可以配对后以边相连，于是得图G，其次数列恰为d_1，d_2，$\cdots,d_\nu$。

35(a) 7, 6, 5, 4, 3, 3,2 若是图序列，则此图 7 个顶，$\Delta \leqslant 6$，而今$d(v_1)=7$；6, 6, 5, 4, 3,3,1 若是图序列，此图 7 个顶，又 $d(v_1)=d(v_2)=6$，于是v_1，v_2与每个顶皆相邻，故 $\forall v \in G$，$d(v) \geqslant 2$，而$d(v_7)=1$，矛盾。

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 显然成立。又 k 个顶导出的子图次数之和$\leqslant k(k-1)$，剩下的 $v_{k+1}, \cdots, v_n$ 可以给予 $v_1, \cdots, v_k$ 最大的可能次数之和 $\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$，故

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k+1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}.$$

36(a) 必要性：G为单图，$d(v_i)=d_i$，$i=1,2,\cdots,n$，(1)与 v_1 关联的边为 $v_1v_2, \cdots, v_1v_{d_1+1}$，则 $G-v_1$ 的图序列是d'。
(2) 若 v_1 关联的 d_1 条边中，有 v_1v_j，且 $j>d_1+1$，令

$$j_0=\max\{j \mid v_1v_j \in E(G)\}>d_1+1,$$

$$i_0=\min\{i \mid v_1v_i \notin E(G)\} \leqslant d_1+1,$$

则 $v_1v_{j_0} \in E(G)$；$j>j_0$ 时，$v_1v_j \notin E(G)$，$v_1v_{i_0} \notin E(G)$；$i<i_0$时，$v_1v_i \in E(G)$，因为 $d_{i_0} \geqslant d_{j_0}$，$\exists v_k$，$v_k$ 与 v_{j_0}不相邻，否则 $d_{j_0} \geqslant d_{i_0}+1>d_{i_0}$，矛盾。令 $G'=G-\{v_1v_{j_0}+v_{i_0}v_k\}+\{v_1v_{i_0}+v_kv_{j_0}\}$，$G'$ 与 G的图序列皆为 d，只是G' 的 j_0 小而 i_0 大了，如此继续，可化成 (1)。

充分性：设G' 的图序列为d'。在G' 上加入异于G' 顶点 $v_2, v_3, \cdots, v_n$ 的新顶v_1，而在 v_1 与v_2，v_3，$\cdots$，v_{d_1+1} 之间连上边，得图G，则G的图序列为 d。

37 若H是G中边数最多的二分生成子图，可以证明H即为所求。

38 取$V(G)=S$，S中两顶相邻当且仅当两点相距为1，

引用$\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon$可得证。

40　令P是最长轨，若P之长小于k，设$P=v_1v_2\cdots v_lv_{l+1}$，则$d(v_1)\geqslant\delta\geqslant k>l$，从而有$v_0$使得$v_0v_1v_2\cdots v_{l+1}$也是轨，与$P$为最长轨矛盾。

41　$v_1\in V_1$，$v_2\in V_2$，由连通性，有轨$P(v_1,v_2)$，在$P(v_1,v_2)$上有两顶u，v，使得$u\in V_1$，$v\in V_2$，$uv\in E(G)$。若G不连通，设G_1，G_2是两个连通片，取$V_1=V(G_1)$，$V_2=V(G)-V_1$，于是V_1与V_2之间不存在端点分别属于V_1，V_2的边，与充分性的假设矛盾。

42　若G不连通，可以分为两个顶点数分别是ν_1与ν_2的互不连通的子图G_1，G_2，从而$\varepsilon(G)\leqslant\binom{\nu_1}{2}+\binom{\nu_2}{2}\leqslant\binom{\nu-1}{2}$，矛盾。

43　$K_{\nu-1}$加上一个0次顶。

44　若G不连通，有一个连通片G_1，$|V(G_1)|\leqslant\left[\frac{\nu}{2}\right]$，

$\Delta(G_1)\leqslant\left[\frac{\nu}{2}\right]-1$，与$\delta>\left[\frac{\nu}{2}\right]-1$矛盾。

45　设G_1是$G-V$的一个连通片，$\sum_{v\in V(G_1)}d_G(v)-2\varepsilon(G_1)>0$为偶数，故$v$伸向$G_1$顶之边至少两条，从而$\omega(G-v)\leqslant\frac{1}{2}d(v)$。

47　设$P=P(v_1,v_2)$与$P'=P'(v_1',v_2')$是两条最长轨，且无公共顶，由连通性存在轨$P''(v_2,v_2')$，从而可找出比P更长的轨。

48　不妨设u，v，w连通，$P(u,v)$，$P'(v,w)$是两条最短轨，则$P(u,v)\cup P'(v,w)$中含一条从u到w的最短轨。

49　任意顶对u，$v\in V(G)$，(1)$uv\in E(G)$时$d_{G^c}(u,v)=1$。

(2) $uv\in E(G)$，(a) $V(G)$ 中任意顶至少与 u，v 中一顶相邻，x，$y\in V(G)$，若 x，y 皆与 u（或 v）相邻，则 $d_G(x,y)\leqslant 2$；若 x 与 u 相邻，y 与 v 相邻，则 $d_G(x,y)\leqslant 3$，故 G 的直径不大于3，不可能。(b) $w\in V(G)$，使得 uw，$vw\in E(G)$，于是 $d_{G^c}(u,v)=2$。综上可知 G^c 的直径小于3。

50　由 $\Delta=\nu-2$ 知，存在顶 v，v 与 $\nu-2$ 个顶相邻，而与顶 u 不相邻，又直径为2，故 u 到各顶距离不超过2，故 $\varepsilon(G)\geqslant 2(\nu-2)=2\nu-4$。

51　存在 $uw_1\in E(G)$，又 G 连通，有轨 $P(u,w_1)$，令 $P=uu_1u_2\cdots u_nw_1$，$r\geqslant 1$。$uu_2\in E(G)$。取 $u_1=v$，$u_2=w$（$n=1$ 时 $u_2=w_1$）。

53　反证法，最长轨方法。

54　设 $P((v_0,v_k)$ 是最长轨，v_0 的邻顶全在 $P(v_0,v_k)$ 上，从而可以找到长至少为 $\delta+1$ 的圈。

55　$xy\in E(G)$，$S(x)$，$S(y)$ 分别表示与 x，y 距离为1的顶集，$S(x)\cap S(y)=\phi$。$|S(x)-y|=|S(x)-x|=k-1$，故至少 $2+2(k-1)=2k$ 个顶。

56　$x\in V(G)$，S_i 是与 x 距离为 i 的顶点集合（$i=0,1,2,\cdots$），S_1 中顶不相邻，S_2 中每顶恰与 S_1 中一顶相邻，$|S_0|=1$，$|S_1|=k$，$|S_2|=k(k-1)$，故 G 至少有 $1+k+k(k-1)=k^2+1$ 个顶。

57(a)　逐次删去一次顶，由于 $\nu=1$ 或2的单图不可能 $\varepsilon\geqslant\nu$，故当删去一次顶的步骤终止时，得到 $\nu\geqslant 3$ 的无一次顶的子图，此子图中有圈。

(b)　只需证明 $\varepsilon=\nu+4$ 时成立。用反证法，若 G 是无两个无公共边的圈的 $\varepsilon=4+\nu$ 的顶数最少的图，则 G 的圈长不小于5，且 $\delta(G)\geqslant 3$，于是，由 $\sum\limits_{v\in V}d(v)=2\varepsilon$ 得知 $\nu+4=\varepsilon\geqslant\frac{3}{2}\nu$，$\nu\leqslant 8$。由围长 $\geqslant 5$，在 G 中有长 g（围长）的圈 C_g，C_g 无对角线，C_g

上的每个顶皆有伸向 C_g 外的边，设 S_1 是 C_g 上顶的邻顶集，则 $|V(C_g)|\leqslant|S_1|$，故 $\nu\geqslant|S_0|+|S_1|\geqslant g+g\geqslant10$，与 $\nu\leqslant8$ 矛盾。

58 用 Dijkstra 算法。

59 只能有人狼羊菜，人狼羊，人狼菜，人羊菜，人羊，空，菜，羊，狼，狼菜10种状态，以这十状态为顶，可以互相转化的两种状态之间连一边，再用 Dijkstra 算法得（边权取1）：

人狼羊菜→狼菜→人狼菜↗狼→人狼羊↘羊→人羊→空。
　　　　　　　　　　　↘菜→人羊菜↗

60 (x_1,x_2,x_3) 表示8，5，3斤瓶子中的有酒状态，用 Dijkstra 算法求（8，0，0）到（4，4，0）的最短轨得：

(800)→(350)→(323)→(620)→(602)→(152)→(143)→(440)。

61 令 $y_n=(a_0^{(n)},\ a_1^{(n)},\ a_2^{(n)})\in S_i$，$f(y_n)=(a_0^{(n)\prime},\ a_1^{(n)\prime},\ a_2^{(n)\prime})$，于是 $a_i^{(n)\prime}\leqslant a_i^{(n)}$，又令 $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，由连续性得 $Z=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=f(y)$；$T$ 是闭集，y，$z\in T$，z 是 y 的 f 象点，即若 $y=(a_0,a_1,a_2)$，则 $Z=(a_0',a_1',a_2')=f(a_0,\ a_1,\ a_2)$，且 $a_i'=\lim\limits_{n\to\infty}a_i^{(n)\prime}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_i^n=a_i$，$y\in S_i$，$S_i$ 闭。

63 $\frac{1}{2}(n-1)n(=\varepsilon(K_n))$。

64 首先逐次删除1次顶，得一个至少四顶图，且不会是圈。

66 $r(3,4)=9$。

67 $r(4,4)=18$。

68 $n'(n-n')$。

69 以人为顶，相识时连一边，则此图中的四边形无对角线，不相邻的二顶在一个四边形上，从而得证此图是正则图（$n=2k$，$\Delta=\delta=k$）。

73 用公式 $\sum\limits_{v\in V}d(v)=2\varepsilon$。

74　用反证法及$\sum_{v\in V} d(v)=2\varepsilon$。

第2章

1　最长轨起点终点非叶则有圈。

2　最长轨方法。

3　若有 s 个叶，$s<k$，用$\sum_{v\in V} d(v)=2\varepsilon$ 计算得矛盾。

4　若 $\varepsilon=\nu-\omega$，而G的某连通片G_1中有圈，$\varepsilon(G_1)\geqslant\nu(G_1)$，从而$\varepsilon(G)=\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(G_i)\geqslant\sum_{i=1}^{\omega}\nu(G_i)-\omega+1=\nu-\omega+1$，矛盾。

5　把叶删除后得的树与原来的树有相同中心。

6　数学归纳法。

7　对 ν 用归纳法。

8　对 k 用归纳法

10　81。

11　记生成树为 τ_n 个，可以证得 $\tau_n-4\tau_{n-1}+4\tau_{n-2}-\tau_{n-3}=0$，从而求出$\tau_n=-2+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$。

12　由公式 $\tau(K_n)=n^{n-2}$，由对称性，K_n 的每条边在它所有的生成树中用了 $(n-1)n^{n-2}\Big/\frac{1}{2}n(n-1)$ 次，所以 $\tau(K_n-e)=n^{n-2}-2n^{n-3}=(n-2)n^{n-3}$。

16　把根删去得两个子树，顶的个数分别为 k 与 $n-k-1$，$k=0,1,\cdots,n-1$，从而得 $b_n=\sum_{k=0}^{n-1}b_kb_{n-k-1}=b_0b_{n-1}+\cdots+b_{n-1}b_0$。由 $xB^2(x)-B(x)+1=0$ 得 $B(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$，把

$\sqrt{1-4x}$ 做级数展开，比较系数得 $b_n=c(n)$。

19 删去生成树的两个叶。

20 有圈时，从圈上删去一条边，无圈时删去一个叶。

26 $\nu(T)$。

27 G 中的生成树对应到 H 中并不是生成树，在 G 中余树边对应的 H 中的 k 条边中，还要选 $k-1$ 条边，从而 G 中一棵生成树，在 H 中产生 $k^{\varepsilon-\nu+1}$ 棵不同的生成树，故 $\tau(H)=k^{\varepsilon-\nu+1}\tau(G)$。

第3章

1 $e\in E'$，$\omega((G-E')\cup e)=1$，若 e 为 $(G-E')\cup e$ 的桥，则 $\omega(G-E')=2$，否则 $\omega(G-E')=1$。

2 G 为 K_k 中加入三个新顶 x，y，z，且每个新顶与 K_k 的每个顶相邻。

3 $\delta=\nu-1$，$G\cong K_\nu$，$\kappa(G)=\nu-1=\delta$。$\delta=\nu-2$，$\exists v_1$，v_2，$v_1v_2\notin E(G)$，$\forall v_3\in V(G)$，v_1v_3，$v_2v_3\in E(G)$，这时任意 $\nu-3$ 个顶的子集 V'，$G-V'$ 仍连通，$\kappa(G)\geq\nu-2=\delta$，$\kappa(G)=\delta$。

4 把两个 K_2 的每个顶皆与 $K_{\nu-4}$ 的各顶之间连上边。

5 G 中有 κ' 条边删除后 G 变成两个连通片 G_1 与 G_2 的不连通图，不妨设 $|V(G_1)|=l<\frac{\nu}{2}$，$\delta\geq\frac{\nu}{2}>l$，$G_1$ 中至少有 $\delta-(l-1)$ 条边伸向 G_2，$\kappa'(G)\geq[\delta-(l-1)]l\geq\delta$，$\kappa'=\delta$。

6 删去 $k-1$ 个顶得图 G_1，则 $\delta(G_1)\geq\frac{1}{2}\nu(G_1)-1$，$G$ 连通。

9 若任二顶间至少有两条无公共边的轨，则 $\forall e\in E(G)$，$G-e$ 连通，即 G 是2边连通的。反之，G 为2边连通图，无桥，把 G 分解成块，$\forall u$，$v\in V(G)$，若 u，v 在同一块，结论成立；u，v 在两块内，例如 B_1，B_2，…，B_n 是块，$u\in B_1$，$v\in B_n$，则连接各块的是割顶，有两条无公共边的轨起于 u 而止于 v，割顶是两条轨公共顶。

10　未必，例如四边形 $ABCD$ 再加上对角线 AC 得到的图中，轨 $BACD$ 与另外的轨皆有公共顶，但它是2连通图.

11　只需证明多于两个顶的块是奇圈.

12　对块数进行归纳法证明.

13　对 G 中割点数进行归纳证明.

14　在 G 上加入新顶 x 与 y，且 x 与 X 中顶皆邻，y 与 Y 中顶皆邻，再用Whitney定理.

15(a)　对 ε 进行归纳证明. (b)　对 ν 进行归纳证明.

第4章

1　只含一个割顶的块是Euler图. 从 G 中把此块的边删除后仍为Euler图.

2　设 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$ 是奇次顶，在 v_i 与 v_{i+k} 之间加上新边 $e_i (i=1, 2, \cdots, k)$.

3　若 $G-v$ 中有圈 C，$G-E(C)$ 中含 v 的连通片是Euler图，T 是此连通片上的Euler回路，T 无法延长成 G 上的Euler回路，故 $G-v$ 是林. 设 Q 是一条不能延长成 G 的Euler回路的最长的起于 v 的行迹，则 Q 是闭行迹，$G-Q$ 的连通片皆Euler图，与 $G-v$ 为林矛盾.

4　用反证法.

6　G 非2连通图，有割顶 v，$\omega(G-v)\geqslant 2$，故非Hamilton图. $|X|<|Y|$，$\omega(G-X)=|Y|>|X|$，G 非Hamilton图.

7　$\omega(G-S)\leqslant\omega(P-S)<|S|+1$，$P$ 是Hamilton轨.

8　若 $v_0\in V(G)$，使 $d(v_0)=2$，v_0 的邻顶为 v_1, v_2，则 G 中不存在以 v_1，v_2 为端点的Hamilton轨. 故 $\delta\geqslant 3$，$\varepsilon\geqslant\left\{\frac{3\nu}{2}\right\}$.

12　有Hamilton轨；仅当 $n=$odd时无Hamilton圈.

13　$\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

14　以骑士为顶，无仇者之间连一边，$d(v)\geqslant n$，$d(u)+d(v)\geqslant 2n$，由 Ore 定理知可以就坐。

19　删去八面体的六个顶则得八个连通片，故不是Hamilton图。

20　在二十面体每个面（三角形）中取一点，两个面相邻时，把其内的二点用线连结，此线与棱相交得到一个图G。G是Hamilton 图（同构于十二面体），沿其Hamilton 圈剪即可。

21　$m\times n$为偶数。

第 5 章

4　平面图的块是平面图。反之，可用关于块数的归纳法证明，每个块皆平面图的图是平面图。

5 (1) $\nu=\phi$。删去 $\phi-1$ 条边后G变成树，故有 $\varepsilon-(\phi-1)=\nu-1$，$\varepsilon=2\nu-2$。(2) $n\geqslant 4$，$n-1$ 条辐的轮是n个顶自对偶图。

8　以S为顶集，仅当两点相距为 1 时，两顶相邻得一图G，可以证明G是平面图，于是 $\varepsilon\leqslant 3n-6$，$n\geqslant 3$ 时等号不成立。

9　正二十面体和正八面体。

10　不是。

12　仅五种。正四面体，4 顶6 边；正六面体，8 顶12边；正八面体，6 顶12 边；正十二面体，20 顶 30 边；正二十面体，12 顶 30 边。

13　考虑此多面体平面嵌入后的对偶图 G^*，$\nu(G^*)=\phi(G)$，$3\leqslant d_{G^*}(v)\leqslant\phi-1$，由抽屉原理，必有两个面边数一致。

第 7 章

1　$(2n-1)!!$，$n!$

2　若有两个相异的完备匹配M_1，M_2，则$M_1\ominus M_2\neq\phi$，$T[M_1\ominus M_2]$的顶皆 2 次顶，不可能。

3　k为偶数，取K_{k+1}；k为奇数，取顶v_1，v_2，…，v_{2k-1}，把奇号顶与偶号顶点间两两加边，再加边v_1v_3，v_5v_7，

…，$v_{2k-1}v_{2k-3}$，得到的图为 G_0，取 k 个两两不交的 G_0 和一个新顶 v_0，把每个 G_0 中的 v_{2k-1} 与 v_0 之间加上边即得所求之 G。

4　若有完备匹配，第二人总取第一人相配的顶，则第一人必输。反之，若 G 中无完备匹配，M 为最大匹配，第一人取未被 M 许配的顶 v_0，下面不论第二人如何取 v_{i-1}，v_{i-1} 皆被 M 许配，于是第一人总取与 v_{i-1} 相配的顶 v_i。

5 (a) 把 $K_{n,n}$ 的顶划分 (X, Y) 中的 X 与 Y 之顶以 0，1，2，…，$n-1$ 编号，(i, j) 表示 X 中的 i 号顶与 Y 中的 j 号顶之间的边，$\{(i, i+k(\mathrm{mod}\, n)\}$ $i=0,1,\cdots,n-1$ 是 $K_{n,n}$ 的1-因子。把 K_{2n} 的顶 v_1，v_2，…，v_{2n-1} 放在正 $2n-1$ 边形的顶点上，v_0 放在中心，对任一 i，取 v_0v_i 边，与 v_0v_i 垂直的边，这 n 条边是 K_{2n} 的一个1－因子。(b) 从 Petersen 图中删去一个1-因子后，剩下两个不交的五边形。

6　K_{2n+1} 的顶为 0，1，…，$2n$。0 放在圆心，其余的等分地放在圆周上，取 $C_1=012(2n)3(2n-1)4(2n-2)\cdots n(n+2)(n+1)0$，$C_1$ 是一个 2-因子，把 C_1 逆时针每转一个顶点就产生一个新的 2 因子。

7　以方格为顶，有公共边界者相邻得一二分图 G，G 无完备匹配。

9 (b)　G 中有 Euler 回路 C，构作二分图 $G'(X, Y, E)$：$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_\nu\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_\nu\}$，$x_ix_j\in E(G')$ 当且仅当 v_i，v_j 在 C 中顺次相连，于是 G' 是可 1-因子分解的，从而 G 可以 2-因子分解。

11　X 是行的集合，Y 为列的集合，当且仅当两线有公共 1 时，两线相邻，构成一个二分图 G。应用定理 3 (König) 即可。

12　按11题构图，把 Y 中不满 k 次的顶"切"成一次顶，再按次数由大到小排列之，从后面调一些一次顶并到前方 m 个顶不满 k 次的顶上，得一 $2m$ 个顶的 k 次正则二分图。有完备匹配，这

种匹配边导出的生成子图对应一个 0-1 $(m\times n)$ 阵，这种步骤可以进行 k 次。

13 $B=X-S$，于是 $X-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(s)|\}=\min\limits_{S\subseteq X}\{|X|-|S|+|N(s)|\}=\min\limits_{B\subseteq X}\{|B|+|N(X-B)|\}$，$G$ 的任最小覆盖皆取 $B\cup N(X-B)$ 的形式，故最大匹配边数为 $|X|-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(s)|\}$。

14 利用 13 题。

15 $G=(X,Y,E)$ 是二分图，ν 是偶数时，加一些边使 $G[Y]$ 是完全图；当 ν 是奇数时，再加一些边，使 $G[Y\cup\{Y_0\}]$ 是完全图，y_0 是增加的新顶。G 变成图 H。G 中有把 X 皆许配的匹配的充要条件是 H 有完备匹配，Hall 定理等价于："H 有完备匹配的充要条是 $\forall S\subseteq X$，$|N_H(s)|\geqslant|S|$"。

16 用 Tutte 定理。G_1，…，G_n 是 $G-S$ 的奇片，m_i 是 G_i 与 S 间的边数，$m_i=\begin{cases}\text{odd}, & k=\text{odd};\\ \text{even}, & k=\text{even}.\end{cases}$ 又 G_i 与 S 至少有 $k-1$ 边相连，$m_i\geqslant k$。$\nu=\text{even}$，则 $o(G-S)=0$。

17 G 有完备匹配，由 Tutte 定理 $o(G-v)\leqslant 1$，又 $\nu(G)=\text{even}$；故 $o(G-v)\geqslant 1$。若 $\forall v\in V(G)$，$o(G-v)=1$，有唯一奇片 $C_0(v)$，v 与 C_0 之间的边为 $e(v)=vu$，$M=\{e(v)\}$ 为完备匹配。

18 在剩的牌多的人手中。

19 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$，$Y=\{(b,c,d),(a,e,f),(a,b,e,f),(a,b,d,f),(a,b,c)\}$，$x_i\in y_j$ 时，$x_iy_j\in E(G)$，构作一个二分图 G。

20 构作二分图 $G=(X,Y,E)$，$X=\{a,b,c,d,e\}$，$Y=\{ace, bc, dab, db, be\}$，$x_i\in y_j$ 时，$x_iy_j\in E(G)$，求 G 的完备匹配。

22 以选出的 8 行为 X，8 列为 Y 构作二分图 $G=(X,Y,E)$，行与列有公共方格时，此二顶相邻，G 是 2 次正则二分图，

有完备匹配，白子与黑子相配。

第8章

1　γ(Petersen) = 3。

2　α(Petersen) = 4。

3　β(Petersen) = 6。

4　$\beta(H)\geqslant\max\{|X(H)|, |Y(H)|\}\geqslant\frac{1}{2}\nu(H)$，反之，$G$不是二分图，有奇圈$H$，$\beta(H)<\frac{1}{2}\nu(H)$，矛盾。

5　只需证连通的有割顶的图不是β-临界的。

6　考虑G及G^c。

8　γ(二十面体) = 2。

9　α(k维立方体) = 2^{k-1}。

11　反驳，例如 Star。

第9章

2　$G=(X,Y,E)$为二分图，设$|X|\geqslant|Y|$，在Y中添加一些顶使$|X|=|Y|$，再加一些边，使成为Δ次正则二分图，逐次求其完备匹配。

3　反证。G存在最佳δ边着色和顶v，满足$d_c(v)>c(v)$。v满足引理2的条件，G中有奇圈，矛盾。

5　$\nu=$odd，在正常边上色中，同色边条数$\leqslant\frac{1}{2}(\nu-1)$。$\frac{1}{2}\chi'(G)(\nu-1)\geqslant\varepsilon(G)$，而$G$正则，$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}\Delta\nu$，$\chi'>\Delta$，由 Vizing 定理，$\chi'\leqslant\Delta+1$，故$\chi'(G)=\Delta+1$。

6　正常边上色时，同色边数最多n条，$\varepsilon>n\Delta$，故$\chi'(G)>\Delta$，由 Vizing 定理，$\chi'(G)=\Delta+1$。

7　每顶3种色各出现一次，每色组成一个匹配。1色与2色边导出的子图是2-因子G_1，G_1连通，G_1为 Hamilton 圈。

8　7节课；若上8节课，需要6间教室。

9　(1) 对$K_{n,n-1}$进行n边着色，$r(2,3,\cdots,3)\leqslant r_{n-1}$，$r(3,3,\cdots,3,2,3,\cdots,3)\leqslant r_{n-1}$。(2) 对$n$进行归纳证明。

18　利用不等式$r_n\leqslant[n!e]+1$及Schur定理，$r_6\leqslant[6!e]+1=1958$。

19　$V(G)$可划分成$\chi(G)$个独立集，第i个独立集n_i个顶，$2\varepsilon(G)\leqslant\nu^2-\sum_{i=1}^{\chi}n_i^2$，当$n_i=\frac{\nu}{\chi}$时，$\sum_{i=1}^{\chi}n_i^2$取极小值，$\frac{\nu^2}{\chi}$，故$\nu^2-2\varepsilon\geqslant\sum_{i=1}^{\chi}n_i^2\geqslant\frac{\nu^2}{\chi}$，$\chi\geqslant\frac{\nu^2}{\nu^2-2\varepsilon}$。

20　G_1为G中1，2，3色顶的导出子图，G_2是其余色(4，5，…，χ)顶导出的子图，G_1，G_2皆非二分图，有无公共顶之奇圈。

25　$k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$，　$k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$。

26　对n进行归纳证明。

27　利用26题及$P(G',k)=kP(G,k-1)$，其中G'是G加一新顶w，再把w与G中各顶连一边。

30　χ(n维立方体)$=2$，χ'(n维立方体)$=n$。

31　否，五色定理。

第10章

1　2^6。

3　若$\delta^->0$，G中每顶至少有一条边进入，又由$\nu<+\infty$，在每顶处选一进入边，这些边导出的子图中有有向圈。

6　竞赛图中有有向Hamilton轨。

7　用$\chi\leqslant\Delta+1$及有向图中有长$\chi-1$的有向轨证明。

8　利用定理4。

10　甲虫能咬死乙虫时，从乙向甲连一条有向边，得一竞赛图。

11　参考第三题。

第 11 章

3　设立附加源 s 与汇 t，从 s 到 x_i 连 3 条有向边，容量分别为 5，10，5；从 y_i 到 t 连 3 条有向边，容量分别为 5，10，5。

4　把每顶 v 变成两个顶 v' 与 v'' 及加一条边 $e=v'v''$，$c(e)$ 取 v 顶的容量，进入 v 的边皆进入 v'，出 v 的边皆出 v''。

5　进行源到汇与汇到源的标志。

第 12 章

5　构作网络：$V'=\{s,t\}\cup\{x_1,\cdots,x_{|V|}\}\cup\{y_1,y_2\cdots,y_{|V|}\}$，$E'=\{sx_i|1\leqslant i\leqslant|V|\}\cup\{y_it|1\leqslant i\leqslant|V|\}\cup\{x_iy_j|v_iv_j\in E(G)\}$，边容量皆 1，证出在 G 中覆盖 V 的轨的最小条数为 $|V|-F$，F 是最大流。

6　构作网络：$V'=\{s,t\}\cup\{x_1,\cdots,x_{|V|}\}\cup\{y_1,\cdots,y_{|V|}\}$，$E'=\{sx_i|1\leqslant i\leqslant|V|\cup\{y_it|1\leqslant i\leqslant|V|\}\cup\{x_iy_i|1\leqslant i\leqslant|V|\}\cup\{y_ix_j|v_iv_j\in E(G)\}$，$x_iy_i$ 的下界为 1，其余边之下界为 0，一切边之上界为 ∞。求从 s 到 t 的最小流。$O(|V|\cdot|E|)$。

11　在一个二分图上解一个匹配问题。

第 13 章

3　设 S 中的边为 $(V_1,\bar{V}_1)$，$\forall v_0\in V_1$，追踪由 v_0 始的 Euler 回路，由于最后还要回到 v_0，故 $(V_1,\bar{V}_1)$ 中的边数一定是偶数。反之，取 $|V_1|=1$，则知每顶皆偶次，是 Euler 图。

4　相应的顶的次数。

5　$G=(X,Y,E)$ 是二分图，$v_1,v_2,v_3,\cdots,v_{|X|},v_{|X|+1},\cdots,v_{|X|+|Y|}$ 是顶的排列。$\{v_1,\cdots,v_{|X|}\}=X$。

6　对应的图是三个顶的轨，A^{1001} 的 2，2 号元素为 0。

8　否。

14　(1) 50，(2) 100。

15　A 对应的图是一个圈，(1) $2n$，(2) 当 $n\neq3$ 时为 0；

当 $n=3$ 时为 6。

17 皆零阵。

18 0。

19 $C_f^{(2)}$ 中的行皆为$\mathscr{C}(G)$ 中元素，可由基底 $C_f^{(1)}$ 中的行线性表出。

20 (1) $\chi'=\Delta(G)$，(2) $\chi(G)=2$。

21 (1) 是，$r(B_f)=3=\nu-1$。(2) 否，B_f 的第三个和为3，有奇次顶；(3) 是，写出B后知仅有两个奇次顶；(4) 是，无 K_5 与 $K_{3,3}$ 的同胚，此图只 4 个顶；(5) $\varepsilon-\nu+1=5-4+1=2$。(6) $\mathscr{C}(G)$中元素共 $2^{\varepsilon-\nu+1}=4$ 个，有一个为零向量，又从B知无 4 次顶，故两个基本圈并成的$\mathscr{C}(G)$ 中另一向量为一个圈；(7) 因度序列为 2，3，2，3，满足 Ore 定理，是 Hamilton 圈；(8) $\tau(G)=8$。

第 14 章

6 $\sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|E|}b_{ij}=0$，$\sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|V|}a_{ij}$ 表示边数。

第 15 章

1 参考 3DM∈NPC 的证明。

3 SC∝HS，令$\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$和 k 是SC 的输入，其中 $S_j\subseteq S=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$R_i=\{j\,|\,u_i\in S_j\}$，HS 的输入：$C=\{R_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}$，$U=\{j\,|\,1\leqslant j\leqslant m\}$，$k$ 保持不变。

4 XC∝0-1 KNAP。令 XC 的输入是集 $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_{t-1}\}$的子集$S_1,S_2,\cdots,S_m$组成，定义$f(I)$：$a_j=\sum_{u_i\in S_j}(m+1)^i$，$j=1,2,\cdots,m$；$n=m$；$b=\sum_{i=0}^{t-1}(m+1)^i=\frac{(m+1)^t-1}{m}$。

5 0-1KNAP∝PART，$m=n+2$；$p_i=a_i$，$i=1,2,\cdots,n$；$P_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i+b$，$P_{n+2}=2\sum_{i=1}^{n}a_i-b$。

章

对每个边 uv 附加上一条新的轨 uxv，VC∝最小支配集

0 HP∈NPC 的证明稍加改变。

2 首先对 $k=2$ 用第 11 题证明。

13 参考 ST∈NPC 的证明。

16 MAXC∝MINEDB。

17 MAXC∝MINCES，I 由 $G'(V', E')$ 和 k' 组成，由 $G(V, E)$，s，t 和 k 组成：

$V=V'\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$n=|V'|$，$E=\{uv|uv\notin E(G')\}$。

$s=x_1$，$t=x_n$，$k=n^2-k'$。

18 参考 0-1KNAP。

19 IND∝IFWB。

参 考 文 献

[1] Bondy J. A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. Macmillan Press LTD, 1976

[2] Even S. Graph Algorithms. Maryland Computer Science Press 1979

[3] Garey M. R, Johnson D S. Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freaman, 1979

[4] [匈]Andra'sfai B. 著，郭照人译. 图论导引. 北京：高等教育出版社，1985

[5] [美]Harary F.著，李慰萱译. 图论. 上海科学技术出版社，1980

[6] 卢开澄. 图论与算法. 清华大学出版社，1981

[7] 陈树柏. 网络图论及其应用. 科学出版社，1982

[8] Beinehe L. W, Wilson R. J, Selected Topics in Graph Theory Academic Press, 1978

[9] Bollobas B. Extramal Graph Theory. Academic Press. 1978

[10] Chartrand G, The Theory and Applications of Graphs,(Fourth International Conference). John wiley & Sons, 1981

[11] 王朝瑞. 图论. 人民教育出版社，1981